ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学

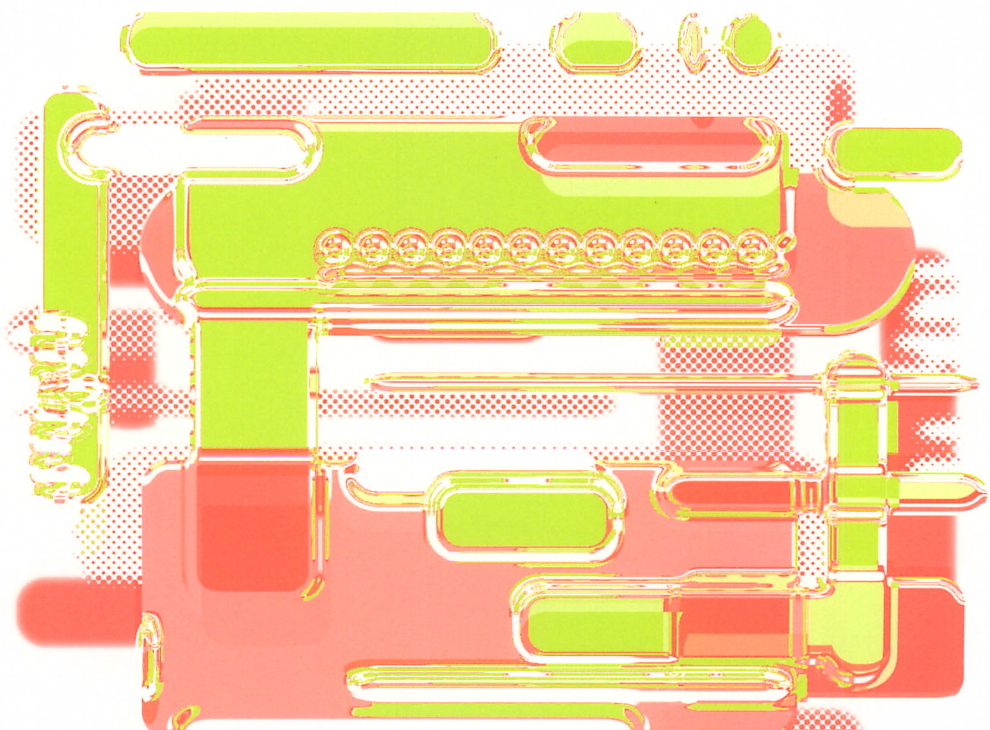
SGCライブラリ
114

For Senior & Graduate Courses

ゲージ理論の基礎数理

物理学的背景からトポロジー，微分幾何，関数解析まで

橋本 義武　著



サイエンス社

SGCライブラリ-114

ゲージ理論の基礎数理

物理学的背景からトポロジー，微分幾何，
関数解析まで

橋本 義武 著

サイエンス社

SGC ライブラリ（The Library for Senior & Graduate Courses）

近年，特に大学理工系の大学院の充実はめざましいものがあります．しかしながら学部上級課程並びに大学院課程の学術的テキスト・参考書はきわめて少ないのが現状であります．本ライブラリはこれらの状況を踏まえ，広く研究者をも対象とし，**数理科学諸分野および諸分野の相互に関連する領域**から，現代的テーマやトピックスを順次とりあげ，時代の要請に応える魅力的なライブラリを構築してゆこうとするものです．装丁の色調は，

数学・応用数理・統計系（黄緑），**物理学系**（黄色），**情報科学系**（桃色），

脳科学・生命科学系（橙色），**数理工学系**（紫），**経済学等社会科学系**（水色）

と大別し，漸次各分野の今日的主要テーマの網羅・集成をはかってまいります．

※ SGC1〜59 省略（品切含）

60 計算神経科学への招待
銅谷賢治著　本体 1429 円

62 熱方程式で学ぶ逆問題
山本昌宏・金成煥 共著　本体 1429 円

63 重力理論講義
前田恵一著　本体 1886 円

65 ネットワーク科学への招待
青山・相馬・藤原 共編著　本体 1886 円

66 物理のためのリー群とリー代数
窪田高弘著　本体 1886 円

67 量子暗号理論の展開
小芦雅斗・小柴健史 共著　本体 1838 円

68 量子力学の考え方
根本香絵著　本体 1829 円

69 量子コンピュータの基礎［第 2 版］
細谷暁夫著　本体 1876 円

71 ε-δ 論法再入門
中神祥臣著　本体 1857 円

72 超関数・フーリエ変換入門
磯崎洋著　本体 1857 円

73 問題例で深める物理
香取眞理・中野徹 共著　本体 1981 円

74 非線形現象と微分方程式
小川知之著　本体 1781 円

76 超弦理論を学ぶための場の量子論
鈴木久男著　本体 2095 円

77 重点解説 ジョルダン標準形
西山享著　本体 1905 円

78 重点解説 ベクトル・テンソル
森川雅博著　本体 2095 円

79 行列解析の基礎
山本哲朗著　本体 2190 円

80 超弦理論の基礎
今村洋介著　本体 2429 円

81 繰りこみ群の物理と数理
伊東恵一著　本体 2190 円

82 超重力理論
谷井義彰著　本体 2381 円

83 共形場理論
伊藤克司著　本体 2238 円

84 演習形式で学ぶ相転移・臨界現象
宮下精二・轟木義一 共著　本体 2476 円

85 実例で学ぶ精度保証付き数値計算
中尾充宏・渡部善隆 共著　本体 2362 円

86 リーマン予想の数理物理
黒川信重・小山信也 共著　本体 2190 円

87 量子多体系の物理
藤本聡・川上則雄 共著　本体 2190 円

88 演習形式で学ぶリー群・リー環
示野信一著　本体 2381 円

89 弦理論の代数的基礎
髙橋篤史著　本体 2476 円

90 アインシュタイン方程式
白水徹也著　本体 2238 円

91 CP 対称性の破れ
林青司著　本体 2476 円

92 弦の場の理論
石橋延幸・村上公一 共著　本体 2429 円

93 超弦理論の応用
夏梅誠著　本体 2495 円

94 複素多様体論講義
辻元著　本体 2362 円

95 幾何学の量子化
前田吉昭・佐古彰史 共著　本体 2429 円

96 量子力学から超対称性へ
坂本眞人著　本体 2476 円

97 行列解析ノート
山本哲朗著　本体 2000 円

98 無限量子系の物理と数理
小嶋泉・岡村和弥 共著　本体 2381 円

99 現代宇宙論講義
辻川信二著　本体 2476 円

100 クォーク・ハドロン物理学入門
国広悌二著　本体 2238 円

101 統計力学から理解する超伝導理論
北孝文著　本体 2457 円

102 量子力学ノート
佐藤文隆著　本体 2238 円

103 量子情報と時空の物理
堀田昌寛著　本体 2457 円

104 弦理論と行列模型
土屋麻人著　本体 2238 円

105 ディラック方程式
日笠健一著　本体 2295 円

106 ホログラフィー原理と量子エンタングルメント
高柳匡著　本体 2407 円

107 パーコレーション理論講義
樋口保成著　本体 2194 円

108 格子模型の数理物理
南和彦著　本体 2222 円

109 数物系のためのミラー対称性入門
秦泉寺雅夫著　本体 2500 円

110 情報幾何学の新展開
甘利俊一著　本体 2593 円

111 作用素環と無限量子系
松井卓著　本体 2083 円

112 重力とエントロピー
福間将文・酒谷雄峰 共著　本体 2546 円

113 4 次元微分幾何学への招待
松下・鎌田・中田 共著　本体 2315 円

114 ゲージ理論の基礎数理
橋本義武著　本体 2315 円

まえがき

1980 年代以降，トポロジーは物理学からの刺激を受けて飛躍的な発展をしてきた．中でも，異種 $\mathbb{R}^4$ の発見の衝撃と共に姿を現した（数学における）ゲージ理論とよばれる分野は，定理の主張そのものは結び目や 3，4 次元多様体のトポロジーに関するものであるが，素粒子間の力を記述するゲージ場の理論をアイデアの源泉としている．それはまた，微分幾何的な量を未知関数とする非線型偏微分方程式の解析を本質的に用い，さらに代数幾何や表現論とも密接な関連をもつという，分野を横断する性格をもっている．

非線型偏微分方程式は言わば無限次元の多様体論である．無限次元多様体という言葉は格好いいが，良い実例を見ていないと空虚な内容に堕するおそれがあり，そこに飛び込むのに躊躇がある．しかし，数学において最も大事なのは自由であることだと思う．自由であるためには無限次元に飛び込むべきである．そのことを場の理論は教えてくれた．また，分野を横断するのは博識になるためではなく，より大きな自由を手に入れるためである．

この本でやろうとしたのは，ゲージ理論を学ぶ準備に役立てられるように，物理学的背景・多様体論・微分幾何・関数解析を横断して，それらの基本的な考え方を概観してみようという試みである．

第 1 章で電磁気学，第 2 章で量子力学の発想に触れる．第 3 章でファイバー束と管状近傍・トム形式について述べる．これらはトポロジーの基本概念である．第 4 章でアフィン接続とリーマン計量，第 5 章でリー群，主束とその上の接続を導入する．これらは微分幾何の基本概念である．第 6, 7, 8 章は関数解析への入門になっている．第 9 章でモース理論，第 10 章で特性類，第 11 章でディラック作用素，最後はボット周期性で締めくくった．

微分積分，集合・写像・集合族・同値関係，ベクトル空間・群・環，距離空間・位相空間の骨格部分は前提としている．これらの事項が整備され教育されているのは本当にありがたいことで，もしそれがなかったら，簡単なことを書くときですらいちいち不自由な思いを強いられたことだろう．あらためて先人たちに深く敬意を表したい．

編集者の方，過去・現在の学生さんたち，恩師や共同研究者をはじめとする数学者・物理学者の方々，家族など多くの人たちのおかげでこの本を書き終えることができたことを感謝する．

2014 年 11 月

橋本 義武

目　次

第 1 章　トポロジーから電磁気へ　1

1.1　電磁場の中の粒子 1

1.1.1　天体と放射線 1

1.1.2　運動方程式とラグランジアン 2

1.1.3　運動量とエネルギー 3

1.1.4　特殊相対論 4

1.1.5　電磁場 6

1.1.6　線積分・面積分 7

1.1.7　微分形式 8

1.1.8　磁束の保存と電磁誘導 10

1.2　電荷のつくる電磁場と絡み数 10

1.2.1　ガウスの法則 10

1.2.2　近接作用論と絡み数 10

1.2.3　アンペールの法則と絡み数 11

1.2.4　マクスウェル方程式と絡み数 12

1.2.5　電磁場のエネルギーとトム形式 13

1.2.6　電磁場のラグランジアン 14

1.2.7　スター作用素 15

1.3　ミンコフスキー空間 15

1.3.1　擬内積と内積 15

1.3.2　擬リーマン計量 16

1.3.3　ミンコフスキー空間 16

第 2 章　スピンから量子力学へ　18

2.1　電子のスピン 18

2.1.1　シュテルン＝ゲルラッハの実験 18

2.1.2　エルミート内積 19

2.1.3　スピノルとホップ写像 20

2.1.4　パウリ方程式 22

2.1.5　グリーン関数 24

2.2　1 次元量子力学 25

2.2.1　自由電子の波動関数 25

2.2.2 井戸型・箱型ポテンシャル 25
2.2.3 波動関数の接続公式 26
2.2.4 トンネル効果 26
2.3 熱核 27
2.3.1 エントロピー 27
2.3.2 カノニカル分布・分配関数・熱核 27
2.3.3 シュレーディンガー方程式と熱核 28
2.3.4 自由粒子の熱核とその漸近展開 29
2.3.5 フィルトレーション 30
2.3.6 熱核の構成の考え方 30
2.3.7 幾何単体 32
2.4 調和振動子とその熱核 32
2.4.1 調和振動子とエルミート多項式 32
2.4.2 ボーア＝ゾンマーフェルトの量子化規則 33
2.4.3 調和振動子の熱核 34

第 3 章 ファイバー束と管状近傍 37

3.1 多様体とファイバー束 37
3.1.1 位相多様体 37
3.1.2 C^∞ 多様体 39
3.1.3 ファイバー束 40
3.2 ベクトル束 41
3.2.1 ベクトル束と変換関数 41
3.2.2 カルテシアン射 41
3.2.3 切断，芽と台 42
3.2.4 ベクトル空間の世界とベクトル束の世界 42
3.2.5 圏とテンソル 42
3.2.6 射影空間とグラスマン多様体 43
3.3 管状近傍 44
3.3.1 接ベクトル空間 44
3.3.2 横断性 45
3.3.3 接ベクトル束とベクトル場 45
3.3.4 管状近傍 46
3.3.5 管状近傍の粒子描像と波動描像 47
3.4 微分形式 47
3.4.1 多様体上の微分形式 47
3.4.2 内部積・外微分作用素・リー微分 48
3.4.3 微分形式のひきもどし 48

3.4.4 複体とコホモロジー 49
3.4.5 ホモトピーと亜群 50
3.4.6 ドラーム・コホモロジー 51
3.5 多様体上の積分とトム形式 51
3.5.1 1の分割 51
3.5.2 密度束 52
3.5.3 密度と積分 52
3.5.4 コンパクト台の微分形式 53
3.5.5 向きと積分 53
3.5.6 トム形式・ポアンカレ双対・オイラー類 54

第4章 アフィン接続とリーマン多様体 55

4.1 超曲面の幾何 55
4.1.1 ユークリッド空間上の等長変換 55
4.1.2 超曲面の管状近傍 57
4.1.3 Theorema egregium 58
4.1.4 リーマン計量と座標系 59
4.2 アフィン接続 60
4.2.1 葉層構造とフロベニウスの定理 60
4.2.2 $\mathbb{R}^n$ の開集合上のアフィン接続 62
4.2.3 共変微分 63
4.2.4 多様体上のアフィン接続 64
4.2.5 測地線と指数写像 64
4.2.6 ヤコビ場 65
4.3 リーマン多様体 65
4.3.1 リーマン多様体 65
4.3.2 曲線の長さ 66
4.3.3 レビチビタ接続 66
4.3.4 測地線 67
4.3.5 測地的法座標系 67
4.3.6 体積要素とリッチ曲率 69

第5章 リー群から ASD 方程式へ 70

5.1 リー群とリー環 70
5.1.1 一般線型群の非可換性 70
5.1.2 リー環 71
5.1.3 一般線型群の部分群 71
5.1.4 リー群 72

5.1.5　作用 72
5.1.6　リー群のリー環 73
5.1.7　線型リー群 74
5.1.8　作用の微分 75
5.1.9　マウラー＝カルタン形式 76
5.2　ベクトル束の接続 77
5.2.1　共変微分・接続，平坦性，平行移動 77
5.2.2　共変外微分，曲率 77
5.2.3　局所的記述 78
5.3　主束と接続 79
5.3.1　主束 79
5.3.2　主束に付随するファイバー束 80
5.3.3　計量ベクトル束と主束 80
5.3.4　自明な主束上の接続形式とゲージ変換 81
5.3.5　主束の接続 82
5.3.6　ゲージ変換 82
5.3.7　可積分接続と曲率 83
5.3.8　共変微分 83
5.3.9　水平なもちあげ 83
5.3.10　SO(N) 主束のリーマン幾何 84
5.4　チャーン＝ヴェイユ理論 85
5.4.1　複素直線束の第 1 チャーン形式 85
5.4.2　不変多項式と特性類 86
5.4.3　チャーン形式とチャーン類 87
5.5　ヤン＝ミルズ接続と ASD 接続 87
5.5.1　リー環上の不変内積 87
5.5.2　スター作用素 88
5.5.3　ヤン＝ミルズ接続 88
5.5.4　ASD 接続 89
5.5.5　AHS 複体 91

第 6 章　コンパクト作用素とフレドホルム作用素　92
6.1　グリーン関数 92
6.1.1　C^1 関数の境界値 92
6.1.2　スツルム＝リウヴィユ型境界値問題 93
6.1.3　境界条件 93
6.1.4　グリーン関数 94
6.1.5　ポアソン方程式と固有値問題 95

6.1.6 拡張されたグリーン関数 . . . 95
6.2 コンパクト作用素 . . . 96
6.2.1 アスコリ＝アルツェラの定理 . . . 96
6.2.2 コンパクト作用素 . . . 97
6.2.3 有界作用素 . . . 98
6.2.4 ヒルベルト＝シュミットの展開定理 . . . 99
6.3 フレドホルム作用素 . . . 101
6.3.1 フレドホルムの二択定理 . . . 101
6.3.2 ハーン＝バナッハの定理 . . . 103
6.3.3 凸性について . . . 104
6.3.4 開写像定理・閉グラフ定理 . . . 105
6.3.5 フレドホルム作用素 . . . 106
6.4 L^p 空間 . . . 107
6.4.1 ルベーグ積分のまとめ . . . 107
6.4.2 L^p 空間 . . . 110
6.4.3 L^p 関数の掛算と一様有界性定理 . . . 112
6.4.4 バナッハ空間の双対 . . . 113
6.4.5 角谷の定理 . . . 115
6.4.6 L^p 空間の双対 . . . 116
6.4.7 L^1, L^∞ の特殊性 . . . 118

第7章 ソボレフ空間 119
7.1 ヘルダー空間 . . . 119
7.1.1 ヘルダー半ノルム . . . 119
7.1.2 ヘルダー空間の間のコンパクト埋めこみ . . . 120
7.2 補間不等式 . . . 122
7.2.1 テスト関数の正関数とその重み . . . 122
7.2.2 ヘルダー半ノルムの間の補間不等式 . . . 123
7.2.3 L^p ノルムの間の補間不等式 . . . 124
7.2.4 L^p ノルムとヘルダー半ノルムの間の補間不等式 . . . 125
7.2.5 ソボレフ半ノルム . . . 126
7.2.6 ソボレフ半ノルムの間の補間不等式 . . . 128
7.3 ソボレフ空間 . . . 133
7.3.1 弱微分とソボレフ空間 . . . 133
7.3.2 たたみこみ . . . 134
7.3.3 C^∞ 関数による近似 . . . 135
7.3.4 ソボレフ不等式 . . . 139
7.3.5 $\mathbb{R}^n$ 上のソボレフ埋めこみ定理 . . . 141

7.3.6 拡張作用素 142
7.3.7 L^p 空間の相対コンパクト集合 142
7.3.8 コンパクト性定理 145
7.3.9 コンパクト・リーマン多様体上のソボレフ空間 147

第 8 章 楕円型作用素と熱核 **148**
8.1 コーシー＝リーマン作用素 148
8.1.1 主表象と楕円型作用素 148
8.1.2 リーマン球面上のコーシー＝リーマン作用素 149
8.2 ラプラシアン 150
8.2.1 $\lambda - \Delta$ に対するアプリオリ評価 150
8.2.2 $\lambda - \Delta$ の像 152
8.2.3 方程式 $\lambda u - \Delta u = f$ の解の存在・一意性・なめらかさ 153
8.2.4 2 階楕円型作用素に対するアプリオリ評価 154
8.2.5 連続性論法 155
8.2.6 解のなめらかさ 156
8.3 多様体上の楕円型作用素 158
8.3.1 多様体上の楕円型作用素 158
8.3.2 調和形式 159
8.4 リーマン多様体上の熱核 161
8.4.1 リーマン多様体上の熱核 161
8.4.2 主束の熱核 162

第 9 章 モース理論と超対称性 **163**
9.1 スメールのモース理論 163
9.1.1 境界つき多様体 163
9.1.2 モース関数 164
9.1.3 勾配流と安定／不安定多様体 164
9.1.4 モース＝スメール複体 165
9.2 フレアのモース理論 166
9.2.1 チャーン＝サイモンズ 3 形式 166
9.2.2 フレア・ホモロジー 167
9.3 超対称量子力学 167
9.3.1 ボソンとフェルミオン 167
9.3.2 ボソンの実現 168
9.3.3 超対称性 169
9.3.4 超対称性とドラーム複体 169
9.4 ウィッテンのモース理論 170

9.4.1 ウィッテン複体 170
9.4.2 ウィッテン・ラプラシアンの固有値の局所化公式 171

第 10 章 特性類 **173**
10.1 スペクトル系列 173
10.1.1 フィルトレーションつき複体 173
10.1.2 コホモロジー群の漸近展開 174
10.1.3 スペクトル系列 174
10.1.4 二重複体 175
10.2 特異コホモロジー 177
10.2.1 特異単体 177
10.2.2 特異チェイン複体 177
10.2.3 ドラームの定理 178
10.2.4 ホモトピー不変性 178
10.2.5 空間の直積 180
10.2.6 錐・重心細分・切除性 183
10.3 セール・スペクトル系列とオイラー類 185
10.3.1 局所系のコホモロジー 185
10.3.2 ファイバー束の誘導する局所系 186
10.3.3 球面束とオイラー類 188
10.3.4 射影空間上の球面束 189
10.3.5 同変オイラー類・スティーフル＝ホイットニー類・チャーン類 190
10.3.6 特性類 191
10.3.7 コボルディスム 192

第 11 章 ディラック作用素 **193**
11.1 クリフォード代数 193
11.1.1 ラプラシアンの平方根 193
11.1.2 クリフォード代数 194
11.1.3 正定値の場合 195
11.1.4 スピノル群とスピン表現 195
11.2 ディラック作用素の指数定理 196
11.2.1 ディラック作用素 196
11.2.2 指数定理 197
11.2.3 族の指数と K 群 198

参考文献 **200**
索　引 **201**

第 1 章
トポロジーから電磁気へ

ゲージ理論が電磁気学を発展させたものだと聞いて，電磁気学の教科書を見ても，そこには渦巻きのような偏微分の記号やニョロニョロと並んだ積分記号が溢れているばかりであり，煩瑣な数式の中に本質が埋もれてしまっていて，どうにもこうにも慊(あきた)りない．結句，電磁気はトポロジー的な現象なのであった．

1.1 電磁場の中の粒子

1.1.1 天体と放射線

身近にある現象は難しい．物理学はむしろ身近にはない対象を考察することによって発展してきた．古典力学は天体の観測データに基いていた．そして現代の物理学は，19 世紀に始まる **放射線** の研究に基いて形成された．

放射線の正体は，(1) 電磁波・赤外線・可視光・紫外線・X 線・ガンマ線などの光子，(2) 電子・ニュートリノ・ミュー粒子などのレプトン，(3) 原子核およびその構成要素である陽子・中性子・中間子などのハドロンに大別される．放射線は，回折・干渉などの波動性とコンプトン効果のような粒子性を併せ持っている．そして物質は放射線が何らかの機構により局在している姿である．

陽子と中性子が結合して原子核を形成するときはたらくのが強い相互作用である．中性子は単独では安定でなく，陽子・電子・反ニュートリノに崩壊するが，これを媒介するのが弱い相互作用である．この過程を，中性子が陽子に変わるときある負電荷の粒子を放出し，この粒子が電子と反ニュートリノの対を生成すると見る．相互作用を媒介する粒子が電荷をもつので，弱い相互作用は電磁相互作用と統一した電弱相互作用という形で理解される．これらの相互作用を同一の原理によって記述するのが **ゲージ理論** である．

1.1.2 運動方程式とラグランジアン

ニュートン力学は，惑星・衛星の運行を抽象化・一般化した『粒子の運動』の概念に基づいて構築された．

粒子がその位置・速度

$$(\boldsymbol{x}(t),\, \dot{\boldsymbol{x}}(t)) = (x^i(t),\, \dot{x}^i(t))_{i=1,\,2,\,3}$$

および時刻 t に依存して力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\, \dot{\boldsymbol{x}},\, t) = (F_1,\, F_2,\, F_3)$ を受けるとする．重要なのは，運動 $\boldsymbol{x}(t),\, t \in I = [t_0,\, t_1]$ において粒子が受ける仕事という量 W である．

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3} F_i \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t.$$

$\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} = 0$ の場合，W は軌跡である有向曲線 $C = \{\boldsymbol{x}(t) \mid t \in I\}$ のみによる．そこで $W = \displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ と書く．右辺を線積分という．

位置と速度 $(\boldsymbol{x}(t),\, \dot{\boldsymbol{x}}(t))$ は，**運動方程式**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}^i) = F_i(\boldsymbol{x},\, \dot{\boldsymbol{x}},\, t), \qquad \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \dot{x}^i$$

に従う．$T(\dot{\boldsymbol{x}}) = \dfrac{1}{2} m\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}$ とおくと，

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{\boldsymbol{x}})\right) \cdot \dot{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t = T(\dot{\boldsymbol{x}}(t_1)) - T(\dot{\boldsymbol{x}}(t_0)).$$

T を運動エネルギーという．運動方程式は，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} = F_i(\boldsymbol{x},\, \dot{\boldsymbol{x}},\, t), \qquad \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \dot{x}^i$$

と書ける．

力 $\boldsymbol{F}$ がポテンシャルとよばれる関数 $V(\boldsymbol{x},\, t)$ によって

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}$$

で与えられる場合，$L = T - V$ とおくと，運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \dot{x}^i$$

と書ける．ポテンシャルに時刻 t のみの関数を足して $V \to V + f(t)$ としても運動方程式が不変であることに注意する．このポテンシャルの不定性が **ゲージ対称性** の話のはじまりである．

一般の座標系 $(q^a)_{a=1,\,2,\,3}$ で書いてみよう．運動は時刻 t の関数 $q^a(t)$ で記述される．さらに変数 $\dot{q}^a$ を導入する．後で微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}q^a}{\mathrm{d}t} = \dot{q}^a$ を課すので，

合成関数の微分 $\dfrac{\mathrm{d}q^a}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial q^a}{\partial x^i}\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$ と微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \dot{x}^i$, $\dfrac{\mathrm{d}q^a}{\mathrm{d}t} = \dot{q}^a$ を両立させるために，等式 $\dot{q}^a = \sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial q^a}{\partial x^i}\dot{x}^i$ によって変数 $(\dot{q}^a)$ を定義する．

$$\frac{\partial \dot{q}^a}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial q^a}{\partial x^i}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial q^a}{\partial x^i} = \frac{\partial \dot{q}^a}{\partial x^i}$$

より，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} &= \sum_{a=1}^{3}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\frac{\partial \dot{q}^a}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^a}\frac{\partial q^a}{\partial x^i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\frac{\partial \dot{q}^a}{\partial x^i}\right)\\ &= \sum_{a=1}^{3}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a}\right)\frac{\partial q^a}{\partial x^i}.\end{aligned}$$

よって座標系 (q^a) による運動方程式は，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}q^a}{\mathrm{d}t} = \dot{q}^a \tag{1.1}$$

と書ける．2 つめの式はしばしば省略される．

より一般に，$q^a, \dot{q}^a$, $a = 1, \ldots, N$ に対し，与えられた関数 $L(q, \dot{q}, t)$ に対し，運動方程式 (1.1) が考えられる．関数 $L(q, \dot{q}, t)$ を **ラグランジアン** という．(1.1) は次のように変分法から導出される．

$I = [t_0, t_1]$ における経路 $q(t)$, $t \in I$ に対し，**作用** とよばれる量

$$S[q(t), t \in I] = \int_{t_0}^{t_1} L\left(q, \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}, t\right)\mathrm{d}t \tag{1.2}$$

を考える．経路の微小変化 $q(t) \to q(t) + \delta q(t)$, $t \in I$ に対する作用 S の微小変化（変分）δS は，

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t \sum_{a=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\delta\dot{q}^a + \frac{\partial L}{\partial q^a}\delta q^a\right)\\ &= \int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t \sum_{a=1}^{N}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} + \frac{\partial L}{\partial x^i}\right)\delta q^a + \sum_{a=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\delta q^a\Big|_{t_0}^{t_1}\end{aligned}$$

である．$\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = \mathbf{0}$ となる微小変位に対して $\delta S = 0$ であることを要請すると，δq が任意であることから，運動方程式 (1.1) が導出される．このように変分法によって導出される微分方程式を，オイラー＝ラグランジュ方程式という．

1.1.3 運動量とエネルギー

ラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ に対し，$p_a = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}$ を **運動量** という．L が q^a によらないとき，運動方程式の解に対し，運動量保存則 $\dfrac{\mathrm{d}p_a}{\mathrm{d}t} = 0$ がなりたつ．

また $E=\sum_{a=1}^{N} p_a\dot{q}^a - L$ を **エネルギー** という．L が時刻 t によらないとき，運動方程式の解に対し，エネルギー保存則 $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=0$ がなりたつ．

エネルギーを座標と運動量で表した式 $E=H(q,\,p,\,t)$ を **ハミルトニアン** という．

$$\frac{\partial H}{\partial q^a} = -\frac{\partial L}{\partial q^a}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_a} = \dot{q}^a + \sum_b \left(p_b \frac{\partial \dot{q}^b}{\partial p_a} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^b}\frac{\partial \dot{q}^b}{\partial p_a} \right) = \dot{q}^a$$

なので，運動方程式 (1.1) は，

$$\frac{\mathrm{d}p_a}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial E}{\partial q^a}, \quad \frac{\mathrm{d}q^a}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial E}{\partial p_a} \tag{1.3}$$

と書ける．与えられた関数 $E=H(q,\,p,\,t)$ に対し，この微分方程式をハミルトン方程式という．この方程式の形は，座標変換 $(q,\,p)\to(Q,\,P)$ で，

$$\frac{\partial Q^b}{\partial q^a} = \frac{\partial p_a}{\partial P_b}, \quad \frac{\partial Q^b}{\partial p_a} = -\frac{\partial q^a}{\partial P_b} \tag{1.4}$$

をみたすものに対して不変である．このような座標変換を **シンプレクティック変換** という．

1.1.4 特殊相対論

宇宙には特別の時刻・位置・方角がないと考えられるので，自由粒子（力を受けていない粒子）のラグランジアン L_0 が $\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}$ のみの関数であるとする．

遅い運動の場合，低次の項が支配的なので，$L_0=\dfrac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}$ と近似できるだろう．定数項は，前述のポテンシャルの任意性を用いて除いておいた．比例定数 m を質量とよぶ．このとき運動量とエネルギーは，

$$\boldsymbol{p}=m\dot{\boldsymbol{x}}, \quad E=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}$$

と書ける．E を $\boldsymbol{p}$ で表すと，$E=\dfrac{1}{2m}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}$ となる．

この近似においては，速度 $\boldsymbol{u}$ の観測者から見た運動量・エネルギーを $\hat{\boldsymbol{p}}$, $\hat{E}$ とすると，

$$\hat{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{u}, \quad \hat{E}=\frac{1}{2m}\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}=E-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p}+\frac{1}{2}m\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}$$

のように変換するが，ここで，変換式が質量 m に依存していることが気になる．質量の異なる複数の粒子が相互作用するときは，粒子ごとに運動量・エネルギーの変換式を変える，というのも妙な話である．

そこで，E と $\boldsymbol{p}$ の間の関係式を修正して，変換式が質量に依存しないように工夫する．$c>0$ を速さの次元をもつ量とし，質量 m に比例する定数項 mc^2

を加えて $E = mc^2 + \dfrac{1}{2m}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}$ とすると，

$$E^2 = (mc^2)^2 + c^2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} + \left(\frac{1}{2m}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}\right)^2.$$

右辺第 2 項は m によらず，$\boldsymbol{p}$ について 2 次であり，左辺も E について 2 次である．$\boldsymbol{p}$ が小さいとき，第 3 項は第 2 項に比べて無視できる．そこで第 3 項を落として，改めて

$$E^2 = (mc^2)^2 + c^2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}$$

とする．このとき，$E, \boldsymbol{p}$ の二次形式 $E^2 - c^2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}$ を保つ線型変換に対し，$E, \boldsymbol{p}$ の関係式の形は不変になる．ハミルトン方程式 $\dot{x}_i = \dfrac{\partial E}{\partial p_i}$ により，$2E\dot{x}_i = 2c^2 p_i$ となる．よって，$E^2 = (mc^2)^2 + E^2 c^{-2}\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}$ であり，速さ $|\dot{\boldsymbol{x}}|$ が c を越えられないことがわかる．さらに，

$$E = mc^2\left(1 - c^{-2}\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}\right)^{-1/2}, \quad \boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{x}}\left(1 - c^{-2}\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}\right)^{-1/2},$$

自由粒子のラグランジアンは，

$$L_0 = \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} - E = -mc^2\left(1 - c^{-2}\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}\right)^{1/2}$$

となる．特殊相対論では，c を光速に取る．

$E^2 = (mc^2)^2 + (cp)^2$ を次のように導くこともできる．

1923 年，物質に X 線を当てるとき，散乱された X 線の波長が入射 X 線の波長より大きくなることが実験により確かめられた．これをコンプトン効果という．この現象は X 線が波動だとすると説明できない．散乱 X 線と入射 X 線の波長の差は散乱角のみにより，入射 X 線の波長にはよらない．

c を光速，h をプランク定数とする．ここでは波長 λ の X 線がエネルギー hc/λ，運動量 h/λ をもつということから出発する．特に X 線が入射方向とちょうど反対方向に散乱される場合の入射 X 線の波長を λ_1，散乱 X 線の波長を λ_2 とし，$m = \dfrac{2h}{c}(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}$ とおく．これは質量の次元をもつ．X 線から電子にエネルギー T と運動量 p が移動したとすると，

$$T = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2}, \quad p = \frac{h}{\lambda_1} + \frac{h}{\lambda_2}.$$

$$\therefore \quad m = \frac{2h}{c}\left(\frac{2hc}{cp - T} - \frac{2hc}{cp + T}\right)^{-1}, \quad (mc^2 + T)^2 = (mc^2)^2 + (cp)^2.$$

よって，運動量 p の電子のエネルギー E が $E^2 = (mc^2)^2 + (cp)^2$ をみたすと考えて，最初に運動量 0, $E = mc^2$ だったのが運動量 p, $E = mc^2 + T$ になったとすれば勘定が合う．$T \ll mc^2$ のときは，$(mc^2)^2 + 2mc^2T \sim (mc^2)^2 + (cp)^2$，すなわち $T \sim \dfrac{1}{2m}p^2$ と近似される．したがって，m は電子の質量と同定される．

1.1.5　電磁場

前にポテンシャルの不定性について述べたが，ラグランジアンにはより大きい不定性がある．すなわち関数 $f(\boldsymbol{x}, t)$ に対し，ラグランジアン L に

$$\partial_t f + \sum_{i=1}^{3}(\partial_i f)\dot{x}^i \qquad \left(\partial_t = \frac{\partial}{\partial t},\ \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

を足すと，作用 (1.2) に

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\boldsymbol{x}, t)\,\mathrm{d}t = f(\boldsymbol{x}(t_1), t_1) - f(\boldsymbol{x}(t_0), t_0)$$

が加わる．したがって δS は変わらず運動方程式も変わらない．

そこで，速度 $\dot{\boldsymbol{x}}$ の 1 次式であるポテンシャル

$$V(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) = V_0(\boldsymbol{x}, t) + \sum_{i=1}^{3} V_i(\boldsymbol{x}, t)\dot{x}^i$$

を考えよう．これは，上記のラグランジアンの不定性に関して閉じた形をしている．また，一般の座標系 $(q^a)_{a=1,2,3}$ で書いても，$(\dot{q}^a)$ に関して 1 次式である．ラグランジアンを

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) = L_0(\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}) - V(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)$$

とすると，変換

$$V_0 \to V_0 - \partial_t f, \quad V_i \to V_i - \partial_i f$$

に対して運動方程式は不変である．電磁場のポテンシャルはこの形をしていて，

$$V(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) = q(\phi(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \dot{\boldsymbol{x}})$$

と書ける．q は粒子の電荷であり，$\phi(\boldsymbol{x}, t)$ はスカラー・ポテンシャル，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = (A_1, A_2, A_3)$ はベクトル・ポテンシャルという量である．$f = qu$ とおくと，(ϕ, A) は，

$$\phi \to \phi - \partial_t u, \quad A_i \to A_i + \partial_i u \tag{1.5}$$

と変換される．これを **ゲージ変換** という．

自由粒子のラグランジアンに対する運動量 $\boldsymbol{p} = \left(p_i = \dfrac{\partial L_0(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right)_{i=1,2,3}$ に対し，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = p_i + qA_i, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -q(\partial_i \phi - (\partial_i \boldsymbol{A}) \cdot \dot{\boldsymbol{x}}),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_i(\boldsymbol{x}(t), t) = \partial_t A_i + (\nabla A_i) \cdot \dot{\boldsymbol{x}}.$$

よって運動方程式は，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B} \times \dot{\boldsymbol{x}}),$$

と書ける．ここで，

$$E_i = -\partial_i \phi - \partial_t A_i, \quad \boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3) = -\nabla\phi - \partial_t \boldsymbol{A}, \tag{1.6}$$

$$B_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i, \quad \boldsymbol{B} = (B_{23}, B_{31}, B_{12}) = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1.7}$$

はそれぞれ電場，磁束密度という量である．

このように，ラグランジアンの不定性に関して閉じた形をしているもっとも簡単なラグランジアンを考えると，電磁場が出てくる．ただし，ここでは電磁場は粒子に影響を与える背景にすぎず，電磁場がどのような法則にしたがって時間発展するかは考えていない．芝居にたとえれば，役者ではなく舞台の書き割りである．

1.1.6　線積分・面積分

これらの量をいろいろな座標系で書きたいことがある．たとえば点電荷のまわりを記述するには極座標が，同軸ケーブルの中を記述するには円柱座標がぴったりである．電磁場にまつわる量をいろいろな座標系で書くには **微分形式** という量のシステムを用いるのが便利である．これは線積分・面積分に付随して現れる．

有界閉区間 $I = [t_0, t_1]$ 上の連続関数 f が C^∞ 関数であるとは，I の内部で C^∞ であって，任意の k 次導関数が I に連続に拡張できることとする．

C^∞ 写像 $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ が単射かつ $\gamma'(t) \neq 0$ $(t \in I)$ であるとき，像 $C = \gamma(I)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の C^∞ 曲線という．曲線 C 上の関数 f が C^∞ 関数であるとは，$f(\gamma(t))$ が $t \in I$ の C^∞ 関数であることと定義する．パラメータ t も C 上の C^∞ 関数である．これを C 上の座標あるいは座標系という．

C 上の座標 t に対し，『t が増える向き』を考えることができる．向きを指定した曲線を有向曲線という．C 上の 2 つの座標系 $t, \tilde{t}$ に対し，『t が増える向き』と『$\tilde{t}$ が増える向き』が一致するのは $\dfrac{\mathrm{d}\tilde{t}}{\mathrm{d}t} > 0$ のときである．

有向曲線 C 上の C^∞ 関数 f, g に対し，

$$\int_C f\,\mathrm{d}g = \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t)) \frac{\mathrm{d}g(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

を **線積分** という．これは C の座標系の取り方によらない．

平面上の有界閉集合 D で境界 ∂D が区分的に C^∞ 曲線であるものを考える．D 上の連続関数 f が C^∞ 関数であるとは，D の内部で C^∞ であって，任意の k 次導関数が D に連続に拡張できることとする．

平面座標を (u, v) で表す．C^∞ 写像 $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ が単射かつベクトル $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}$ が D の各点で 1 次独立であるとき，像 $S = \varphi(D)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の

C^∞ 曲面という．曲面 S 上の関数 f が C^∞ 関数であるとは，$f(\varphi(u, v))$ が $(u, v) \in D$ の C^∞ 関数であることとする．u, v も S 上の C^∞ 関数である．(u, v) を S 上の座標あるいは座標系という．

S 上の 2 つの座標系 (u, v), $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ が同じ向きであるとは，ヤコビアン $\dfrac{\partial(\widetilde{u}, \widetilde{v})}{\partial(u, v)}$ が正であることとする．向きを指定した曲面を有向曲面という．

有向曲面 S 上の C^∞ 関数 f, g, h に対し，

$$\int_S f\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h = \int_D f(\varphi(u, v))\frac{\partial(g(\varphi(u, v)),\, h(\varphi(u, v)))}{\partial(u, v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

を **面積分** という．これは S の座標系の取り方によらない．

このとき次が成立する．

定理 1.1.1（ストークスの定理）
(1) C を端点 P から Q への有向曲線とすると，$\displaystyle\int_C \mathrm{d}f = f(\mathrm{Q}) - f(\mathrm{P})$.
(2) 有向曲面 S の境界 ∂S の向きを然るべく定めると，$\displaystyle\int_S \mathrm{d}f\,\mathrm{d}g = \int_{\partial S} f\,\mathrm{d}g$.

線積分の記号 $\displaystyle\int_C f\,\mathrm{d}g$ における $f\,\mathrm{d}g$ や面積分の記号 $\displaystyle\int_S f\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h$ における $f\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h$ に，さらに d に，独立した意味を与えることができる．それが **微分形式** という量のシステムである．

1.1.7　微分形式

$\mathbb{R}^n$ の開集合 U, V に対し，U から V への C^∞ 写像で，逆写像が存在してそれも C^∞ 写像であるようなものを，**微分同相** という．開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上の C^∞ 写像 $\varphi = (x^1, \ldots, x^n) : U \to \mathbb{R}^n$ で，開集合の上への微分同相であるものを，U 上の座標あるいは座標系という．包含写像 $U \to \mathbb{R}^n$ も座標系だが，これを特別視せずすべての座標系を対等に扱う広い心をもつことにする．開集合 U 上の関数が 1 つの座標系について C^∞ 級ならば，他の座標系に対しても C^∞ 級である．そこで U 上の C^∞ 関数全体のなすベクトル空間を $C^\infty(U)$ とおくと，これは座標系の取り方によらない．このベクトル空間はさらに可換 $\mathbb{R}$ 代数でもある．U 上の座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$ に関する偏微分作用素を

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} : C^\infty(U) \to C^\infty(U), \quad \nabla = (\partial_i) : C^\infty(U) \to C^\infty(U)^{\oplus n}$$

とする．$\mathit{\Omega}$ を $e^1, \ldots, e^n$ を基底とする $C^\infty(U)$ 上の自由加群とし，線型写像

$$\mathrm{d} : C^\infty(U) \to \mathit{\Omega}, \quad \mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\,e^i$$

を考える．『項の中に 2 度出てくる添字については和を取る』というアインシュタインの規約を用いることにすると，$\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}\,e^i$ と書ける．

$\mathit{\Omega} = C^\infty(U)^{\oplus n}$ と見て，e^i を第 i 成分が 1 で他が 0 である n 次列ベクトル

と見なすとき，$\mathrm{d}f = \nabla f$ である．

$\mathrm{d}x^i = e^i$ なので，Ω の元は

$$f_i\,\mathrm{d}x^i = f_1\,\mathrm{d}x^1 + \cdots + f_n\,\mathrm{d}x^n \quad (f_i \in C^\infty(U))$$

と一意的に書ける．これを U 上の **1 次微分形式** という．1 次微分形式

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \in \Omega$$

を f の **全微分** あるいは **外微分** という．

U 上の他の座標系 $(y^1, \ldots, y^n)$ に対し，

$$\mathrm{d}y^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i, \quad \mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\,\mathrm{d}y^j$$

より，$\mathrm{d}y^j$ $(j = 1, \ldots, n)$ も $C^\infty(U)$ 上の自由加群 Ω の基底であり，

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\,\mathrm{d}y^j = \frac{\partial f}{\partial y^j}\,\mathrm{d}y^j$$

となる．したがって，$C^\infty(U)$ 自由加群 Ω と準同型 $\mathrm{d} : C^\infty(U) \to \Omega$ は座標系の取り方によらない．そこで $\Omega = \Omega^1(U)$ と書く．

さらに結合則をみたす $\mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^n$ の積 $\wedge$ を，

$$\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^i = 0, \quad \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i = -\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$$

となるように定義する．これも座標系の取り方によらない．以下，記号 $\wedge$ をしばしば略す．$f\,\mathrm{d}x^{i_1}\cdots\mathrm{d}x^{i_k}$ $(f \in C^\infty(U))$ の和を k **次微分形式** という．U 上の k 次微分形式全体のなすベクトル空間を $\Omega^k(U)$ とする．これは $C^\infty(U)$ 上の階数 $\binom{n}{k}$ の自由加群であって座標系によらない．$\Omega^0(U) = C^\infty(U)$ とすると，$\Omega^*(U) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U)$ は $C^\infty(U)$ 上の代数になる．

外微分作用素 とよばれる線型写像 $\mathrm{d} : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ を，$k = 0$ の場合から拡張して，

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = (\mathrm{d}\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta \quad (\alpha \in \Omega^k(U),\ \beta \in \Omega^p(U)),$$
$$\mathrm{d}(\mathrm{d}x^i) = 0$$

により帰納的に定義する．このとき，$\mathrm{dd} = 0$ がなりたつ．d の定義は座標系によらない．

こうして微分形式と外微分作用素が座標系によらない概念として定義できた．このことはこれらの概念が **多様体** の上に拡張されることを意味する．

微分形式を用いると，シンプレクティック変換の条件 (1.4) は，

$$\sum_{a=1}^N \mathrm{d}Q^a \wedge \mathrm{d}P_a = \sum_{a=1}^N \mathrm{d}q^a \wedge \mathrm{d}p_a$$

と書ける．

1.1.8 磁束の保存と電磁誘導

$A = -\phi\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ とおくと，

$$\mathrm{d}A = \sum_{i=1}^{3}(-\partial_i\phi - \partial_t A_i)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}t + \sum_{1\le i<j\le 3}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j.$$

$\mathrm{dd}A = 0$ なので，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \quad \nabla\times\boldsymbol{E} + \partial_t\boldsymbol{B} = 0 \tag{1.8}$$

がなりたつ．これらはマクスウェル方程式の半分，磁束の保存と電磁誘導の法則である．電磁場がスカラー／ベクトル・ポテンシャルで書けるということに由来している．

1.2 電荷のつくる電磁場と絡み数

1.2.1 ガウスの法則

荷電粒子が電磁場から受ける力について述べた．次に，荷電粒子の周囲にできる電磁場について考える．

電場 $\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3)$ に対し，

$$\mathcal{D} = \varepsilon_0(E_1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 + E_2\mathrm{d}x^3\mathrm{d}x^1 + E_3\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2)$$

とおき，この 2 次微分形式を電束密度とよぶ．ε_0 は真空の誘電率という定数である．このとき，次が成立する．

ガウスの法則　電束密度 $\mathcal{D}$ の閉曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 上の面積分 $\int_\Sigma \mathcal{D}$ は，Σ で囲まれる領域に含まれる荷電粒子の電荷の和に等しい．

これはトポロジー的な法則である．「閉曲面で囲まれる領域」というのはトポロジーの概念なのである．「平面に閉曲線を描いたら内と外に分かれる」ことを主張するジョルダンの曲線定理は，あたりまえに見えて証明が長いことで有名である．

1.2.2 近接作用論と絡み数

電磁場は，荷電粒子や磁石の間にはたらく力を，近接作用の立場で説明するために導入された概念であった．たとえば荷電粒子の間にはたらく力だったら，

1. 荷電粒子が周囲に影響を及ぼし，
2. それが有限の速さで伝わり，
3. 別の荷電粒子に達して作用する

という描像である．

ガウスの法則は，荷電粒子の位置や電磁場が時間とともに変化していても成

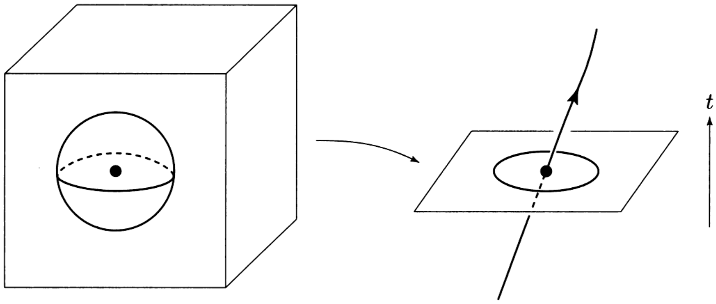


図 1.1

立する．これは近接作用の立場からすると一見奇妙である．同時刻において，荷電粒子と閉曲面上の電磁場は離れた位置にあり，たがいに影響を及ぼさないはずだからである．

現在の閉曲面上に影響を及ぼしているのは過去の荷電粒子なのに，現在の荷電粒子から現在の閉曲面上の電磁場がわかるのは，電荷の保存則によって過去の荷電粒子の電荷が現在の荷電粒子の電荷によって決まっているためと考えられる．つまり，ガウスの法則は電荷の保存則を含んでいるのである．それはトポロジーのことばで次のように定式化される．

すなわち，閉曲面 Σ 上の電磁場を決めるのは，同時刻の荷電粒子というより，荷電粒子の世界線（時空における粒子の軌跡）なのである．ガウスの法則は，

$$\int_{\Sigma} \mathcal{D} = \sum_{\mathrm{Q}} q_{\mathrm{Q}} \, \mathrm{Lk}(L_{\mathrm{Q}}, \Sigma)$$

と書かれるべきである．ここで，$q_{\mathrm{Q}}, L_{\mathrm{Q}}$ は荷電粒子 Q の電荷と世界線，$\mathrm{Lk}(L_{\mathrm{Q}}, \Sigma)$ は L_{Q} と Σ の **絡み数**，すなわち Σ を境界とする 3 次元の膜と Q の世界線の交点を符号をつけて数えたものである．この数は，膜の張り方によらず，また閉曲面や世界線の連続変形によって変わらない **位相不変量** である．閉曲面が同時刻の空間に含まれる場合に限定したものが，通常のガウスの法則である．

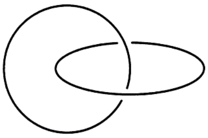
1.2.3 アンペールの法則と絡み数

$\mathbb{R}^3$ における 2 つの向きづけられた閉曲線（結び目）K, K' の **絡み数** $\mathrm{Lk}(K, K')$ とは，K' を境界とする膜と K との交点を符号をつけて数えたものであり，膜の張り方によらない位相不変量である．

磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に対し，

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\mu_0}(B_{23}\mathrm{d}x^1 + B_{31}\mathrm{d}x^2 + B_{12}\mathrm{d}x^3)$$

とおき，この微分形式を磁場とよぶ．$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$ は真空の透磁率という定数である．このとき，次が成立する．



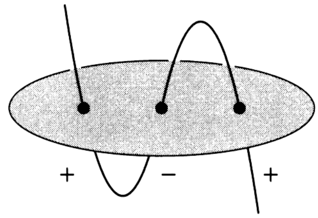


図 1.2

アンペールの法則　閉曲線 K に沿う電流 I_K のまわりに生じる磁場 $\mathcal{H}$ を閉曲線 K' 上で積分すると，

$$\int_{K'} \mathcal{H} = I_K \mathrm{Lk}(K,\, K').$$

これがアンペールの法則の本来の姿である．K, K' がホップ絡み目（円 K に円板を張るとそれが円 K' と 1 点で交わるもの）で $\mathrm{Lk}(K,\, K') = 1$ となる向きをもつ場合に限定したものが，通常のアンペールの法則である．

1.2.4　マクスウェル方程式と絡み数

ガウスの法則の閉曲面 Σ が同時刻空間 $t = \mathrm{const}$ に束縛されているというのは，トポロジーの感覚からも，相対論の原理からも不自然な設定である．同時刻空間にあるとは限らない閉曲面 Σ の上の面積分を考えなければならない．その場合，2 次微分形式 $\mathcal{D}$ の他に時間方向の微分形式 $\mathrm{d}t$ を含む項もある方が自然である．そこで，

$$\int_{\Sigma} \mathcal{D} - \mathcal{H}\,\mathrm{d}t = \sum_{\mathrm{Q}} q_{\mathrm{Q}}\, \mathrm{Lk}(L_{\mathrm{Q}},\, \Sigma)$$

とする．これはガウスの法則とアンペールの法則を統一したものであって，マクスウェル方程式の残り半分の積分形に他ならない．点電荷ではなく，電荷が連続的に分布している場合，対応する微分方程式は，

$$\nabla \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \rho, \quad \nabla \times {\mu_0}^{-1} \boldsymbol{B} - \partial_t(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{j} \tag{1.9}$$

となる．ρ は電荷密度，$\boldsymbol{j}$ は電流密度である．真空では $\mathrm{d}(\mathcal{D} - \mathcal{H}\,\mathrm{d}t) = 0$ と書ける．

閉曲面 Σ が円柱の表面 $\partial(D^2 \times [t_0,\, t_1])$ である場合，側面 $\partial D^2 \times [t_0,\, t_1]$ の積分がアンペールの法則に，上底・下底 $D^2 \times \{t_0,\, t_1\}$ の積分が変位電流の項に対応する．閉曲面が同時刻空間の中にある場合はガウスの法則である．

まとめると，マクスウェル方程式は，(1) スカラー／ベクトル・ポテンシャルの存在，(2) 時空における電荷の世界線と閉曲面の絡み数の積分公式，から成っている．

1.2.5 電磁場のエネルギーとトム形式

豆電球を電池につなぐと光る．このとき，電池から豆電球へエネルギーを運ぶのが，導線のまわりの電磁場であり，エネルギーの流れを表すのが **ポインティング・ベクトル場** という量である．これは導線の **トム形式** という量でもある．

電磁場が電流に与える単位時間・単位体積あたりの仕事は，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} &= (\nabla\times{\mu_0}^{-1}\boldsymbol{B}-\partial_t(\varepsilon_0\boldsymbol{E}))\cdot\boldsymbol{E}\\ &= -\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times{\mu_0}^{-1}\boldsymbol{B})+(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot{\mu_0}^{-1}\boldsymbol{B}-\partial_t(\varepsilon_0\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{E}\\ &= -\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times{\mu_0}^{-1}\boldsymbol{B})-\partial_t\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}+\frac{1}{2}{\mu_0}^{-1}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}\right)\end{aligned}$$

である．そこで，

$$U=\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}+\frac{1}{2}{\mu_0}^{-1}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B} \tag{1.10}$$

を電磁場のエネルギー密度，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}\times{\mu_0}^{-1}\boldsymbol{B}$ を単位時間に単位面積を横切って移動するエネルギーと考える．$\boldsymbol{P}$ を **ポインティング・ベクトル場** という．これは電磁気学を理解する上で最も重要な量である．

真空中の静電場・静磁場に対して一般にポインティング・ベクトル場は 0 でない．この場合，エネルギーが移動するのは変な気もするが，$\nabla\cdot\boldsymbol{P}=0$ となっていて，エネルギー密度は時間によらないので問題ない．

電池と豆電球をつないだ直流回路の場合，陽極・陰極につないだ導線の間の電位差により電場ができ，アンペールの法則により磁場ができるので，導線のまわりの空間に電池側から豆電球側へ向かうポインティング・ベクトル場が生じている．すなわち，エネルギーは導線のまわりの空間を通るのである．途中でエネルギーの損失がないものとすると，導線上の点 p において直交する面上のポインティング・ベクトル場の面積分の値は，p によらず一定である．$\nabla\cdot\boldsymbol{P}=0$ となるようにポインティング・ベクトル場 $\boldsymbol{P}$ を導線の中まで拡張すると，後

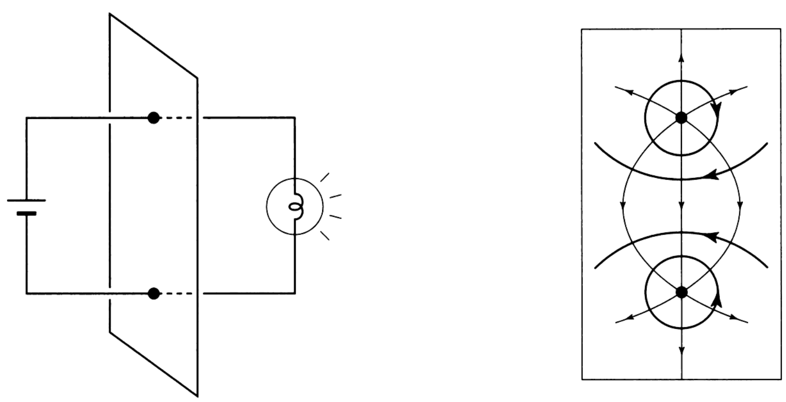


図 1.3

で述べる，導線（の芯である曲線）の **トム形式** になっている．トム形式は，トポロジーを理解する上で最も重要な量である．

1.2.6　電磁場のラグランジアン

電磁場 $(\phi, \boldsymbol{A})$ に対し，(1.6), (1.7) によって $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ を定義し，さらに (1.10) によって U を定義する．与えられた電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ に対し，時刻 t の関数

$$L[(\phi, \boldsymbol{A})] = \int_{\mathbb{R}^3} (U - \rho\phi + \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A})\, \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3$$

を電磁場のラグランジアン という．$U - \rho\phi + \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A}$ をラグランジアン密度といい，U をその運動項，$-\rho\phi + \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A}$ をポテンシャル項という．

$I = [t_0, t_1]$ における電磁場の経路 $A(\boldsymbol{x}, t) = -\phi\, \mathrm{d}t + \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$, $t \in I$ に対し，作用 S を

$$S[A(\cdot, t),\ t \in I] = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, L[(\phi, \boldsymbol{A})]$$

によって定義する．経路の微小変化 $A(\boldsymbol{x}, t) \to A(\boldsymbol{x}, t) + \delta A(\boldsymbol{x}, t)$, $t \in I$ に対し，

$$\begin{aligned}
\delta U &= -\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot (\nabla\, \delta\phi + \partial_t\, \delta\boldsymbol{A}) + {\mu_0}^{-1} \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \delta\boldsymbol{A}) \\
&= \nabla \cdot (-\varepsilon_0 \boldsymbol{E}\, \delta\phi + {\mu_0}^{-1} \boldsymbol{B} \times \delta\boldsymbol{A}) - \partial_t(\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \delta\boldsymbol{A}) \\
&\qquad + \nabla \cdot \boldsymbol{E}\, \delta\phi + (-\nabla \times {\mu_0}^{-1} \boldsymbol{B} + \partial_t(\varepsilon_0 \boldsymbol{E})) \cdot \delta\boldsymbol{A}.
\end{aligned}$$

よって，空間の無限遠で $\delta A = 0$ とし，$t = t_0, t_1$ で $\delta \boldsymbol{A} = 0$ とすると，オイラー＝ラグランジュ方程式はマクスウェル方程式 (1.9) となる．

ラグランジアン密度の運動項 U はゲージ変換 (1.5) に対して不変である．ポテンシャル項は，

$$-\rho(\phi - \partial_t u) + \boldsymbol{j} \cdot (\boldsymbol{A} + \nabla u) = -\rho\phi + \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A} + \partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\boldsymbol{j} u) - (\partial_t \rho + \nabla \cdot \boldsymbol{j}) u$$

のように変換する．よって電荷の保存則 $\partial_t \rho + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$ がなりたつとき，作用がゲージ変換 (1.5) に対して不変になる．

$c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ とおくと，これは速さの次元をもつ．マクスウェル方程式 (1.9) は，真空中（$\rho = 0$, $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$）で

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \quad \nabla \times c^2 \boldsymbol{B} - \partial_t \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \tag{1.11}$$

となる．(1.8) と合わせると，速さ c の波動方程式

$${\partial_t}^2 \boldsymbol{E} = c^2 \Delta \boldsymbol{E}, \quad {\partial_t}^2 \boldsymbol{B} = c^2 \Delta \boldsymbol{B}$$

が得られる．その解が電磁波である．ε_0, μ_0 から決まる c の値が当時の光速の

測定値に近かったことから，マクスウェルは光も電磁波であると喝破した．

現在の光速 c の値は 299792458 m/sec である．1983 年以降，光速がちょうどこの値になるように秒からメートルを定義している．

真空中の電磁場の作用は，したがってマクスウェル方程式は，二次形式 $c^2t^2 - \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$ を保つ線型変換に対して不変になる．光より遅い粒子の速さは粒子の本質でなく偶有性だが，光速は光の偶有性でなく本質である．

1.2.7 スター作用素

$x^0 = ct$ とおき，スター作用素 $*: \Omega^2(\mathbb{R}^4) \to \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ を

$$*(\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^0) = \mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k, \quad *(\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k) = -\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^0$$

(i, j, k は 1, 2, 3 の偶置換) で定義すると，次の等式がなりたつ．

$$\mathcal{D} - \mathcal{H}\,\mathrm{d}t = (\varepsilon_0{\mu_0}^{-1})^{1/2} * \mathrm{d}A.$$

真空のマクスウェル方程式は $\mathrm{d}*\mathrm{d}A = 0$ と書くことができる．これは後の章で述べる **ヤン＝ミルズ方程式** の特別な場合である．

1.3 ミンコフスキー空間

1.3.1 擬内積と内積

実ベクトル空間 V に対し，双線型写像 $g: V\times V \to \mathbb{R}$ が対称であるとは $g(u, v) = g(v, u)$ をみたすこと，さらに非退化であるとは，任意の $v\in V$ に対して $g(u, v) = 0$ となるのが $u = 0$ に限ることである．対称かつ非退化な双線型写像 $g: V\times V \to \mathbb{R}$ を **擬内積** とよぶ．正値性 $g(u, u) > 0$ $(u \neq 0)$ をみたす擬内積が内積である．

擬内積 g に対し，$g(u, v) = 0$ となるとき u, v はたがいに直交するといい，$g(u, u) = 0$ のとき，u はヌル・ベクトルであるという．$g(u, v) \neq 0$ とすると，$g(u+v, u+v)$, $g(u, u)$, $g(v, v)$ のいずれかは 0 でない．よって $V \neq 0$ であるかぎり，ヌル・ベクトルでないベクトルはつねに存在する．

V の基底 $e_1, \ldots, e_n$ に対し，擬内積 g は n 次非退化対称行列 $(g_{ij})_{i,\,j\in\{1,\ldots,n\}}$ により，

$$g(u, v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}u_iv_j, \quad u = \sum_{i=1}^{n} u_ie_i, \quad v = \sum_{i=1}^{n} v_je_j$$

と表される．

定理 1.3.1 (シルヴェスター) n 次元実ベクトル空間 V 上の擬内積 g に対し，$p \in \{0, 1, \ldots, n\}$ および V の基底 $e_1, \ldots, e_n$ が存在して，

$$g(e_i, e_j) = -1\ (i = j \le p),\ 1\ (i = j > p),\ 0\ (i \neq j)$$

となる．さらに p は基底の取り方によらない．

そこで，p を g の **指数**，$\{e_1, \ldots, e_n\}$ を (V, g) の正規直交基底とよぶことにする．

1.3.2 擬リーマン計量

$\mathbb{R}^n$ の座標系つき開集合 (U, φ), $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ において，1 次微分形式の可換な積 $\cdot$ を導入し，$g_{ji} = g_{ij} \in C^\infty(U)$ に対し，

$$g = g_{ij}\, \mathrm{d}x^i \cdot \mathrm{d}x^j$$

とおく．アインシュタインの規約を用いている．

別の座標系 $(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n)$ に対して，$\hat{g}_{kl} = g_{ij}\dfrac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^k}\dfrac{\partial x^j}{\partial \hat{x}^l}$ とおくと，$g = g_{kl}\, \mathrm{d}\hat{x}^k \cdot \mathrm{d}\hat{x}^l$ と，同じ形になる．g を 2 階共変 **対称テンソル場** という．

さらに $(g_{ij}(p))_{i, j\in\{1, \ldots, n\}}$ が各点 $p \in U$ で非退化対称行列であるとき，g を U 上の **擬リーマン計量** という．$(g_{ij}(p))$ が正定値であるとき，g を **リーマン計量** という．正定値，負定値でない擬リーマン計量を **ローレンツ計量** という．擬リーマン計量やリーマン計量の概念も座標系の取り方によらない．

擬リーマン計量 (g_{ij}) に対し，$g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$ によって $g^{ij} \in C^\infty(U)$ を定義することができる．δ^i_k はクロネッカーのデルタである．ディラックの頭文字を用いたのは天の啓示があったのだろうか．これを用いて，1 次微分形式の空間 $\Omega^1(U)$ 上に C^∞ 関数に値をとる擬内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を，$\langle \mathrm{d}x^i, \mathrm{d}x^j\rangle = g^{ij}$ によって定義する．これに対する正規直交基底を (e_i) とすると，k 次微分形式の空間 $\Omega^k(U)$ 上の擬内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を，

$$\{e_{i(1)} \wedge \cdots \wedge e_{i(k)} \mid i(1) < \cdots < i(k)\}$$

がたがいに直交し，かつ

$$\langle e_{i(1)} \wedge \cdots \wedge e_{i(k)},\, e_{i(1)} \wedge \cdots \wedge e_{i(k)}\rangle = \prod_{a=1}^{k} \langle e_{i(a)},\, e_{i(a)}\rangle$$

となるように定めることができる．

擬リーマン計量 (g_{ij}) に対し，$\omega_g = |\det(g_{ij})|^{1/2}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$ を **体積形式** という．これは g を保つ座標変換で符号を除いて不変である．そして，**スター作用素** $* : \Omega^k(U) \to \Omega^{n-k}(U)$ を

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha,\, \beta\rangle\, \omega_g, \quad (\alpha,\, \beta \in \Omega^k(U))$$

によって定義する．

1.3.3 ミンコフスキー空間

$M = \mathbb{R}^{n+1}$ と座標系 $\varphi = (x^0, \ldots, x^n)$ に対し，擬リーマン計量

$$g_M = \mathrm{d}x^0 \cdot \mathrm{d}x^0 - \mathrm{d}x^i \cdot \mathrm{d}x^i = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \cdot \mathrm{d}x^\nu$$

$$\eta_{\mu\nu} = 1\ (\mu = \nu = 0),\ -1\ (\mu = \nu \geq 1),\ 0\ (\mu \neq \nu)$$

を与えたものを **ミンコフスキー空間** という．

M の各点 p に対し，M の 2 つの部分集合

$$M_p^{\pm} = \{q \in M \mid g(q-p, q-p) > 0,\ \pm(x^0(q) - x^0(p)) > 0\}$$

（複号同順）は，p と g_M を保つ座標変換によって，不変であるか M_p^+, M_p^- がいれかわるかである．$\{M_p^+ \cap M_{p'}^- \mid p, p' \in M\}$ を基とする位相は，$M = \mathbb{R}^{n+1}$ の通常の位相に一致する．

第 2 章
スピンから量子力学へ

「彼女は，彼の友人とそういう関係にあったんだけど，なぜか彼は彼女の心の扉を開けて中を覗いてみようとはしなかった．彼は研究に没頭して，ついに私たちの世界を一変させる理論を作りあげたの．」
「その理論は君たちの世界に何をもたらしたんだい？」
「箱の中の猫が生きているのかいないのかわからなくなった．」
「箱の中の猫？ でも，それは箱の中が見えていないだけであって，生きているかいないかのどちらかではあるんだろう？ 少なくとも僕のいた向こう側の世界ではみんなそういうふうに考えている．」
「いいえ，あなたが迷い込んできたこちら側の世界ではそうじゃないの．箱を開けるまでその猫は生きているかいないかのどちらかでさえなくて，生きている猫と死んでしまった猫の重ね合わせであり続けるの．」
「彼女が，彼を愛している女と彼の友人を愛している女の重ね合わせであり続けたように？」
「そう．彼は，重ね合わせのままの彼女を受け入れることができた．」

2.1 電子のスピン

2.1.1 シュテルン=ゲルラッハの実験

電子は負の電荷をもつだけでなく磁気双極子（長さ 0 太さ 0 の棒磁石）でもある．磁気双極子の向きと強さを表すのが磁気モーメント・ベクトルである．電子は自転しているわけではないが，磁気モーメントに平行な角運動量をもつ．これをスピン角運動量という．

銀原子 1 つの磁気モーメントは電子 1 つの磁気モーメントにほぼ等しいと考えられる．1922 年，シュテルンとゲルラッハは，銀原子のビームを不均一な磁場に入射して曲がり方を見ることにより，銀原子の磁気モーメントの成分を，

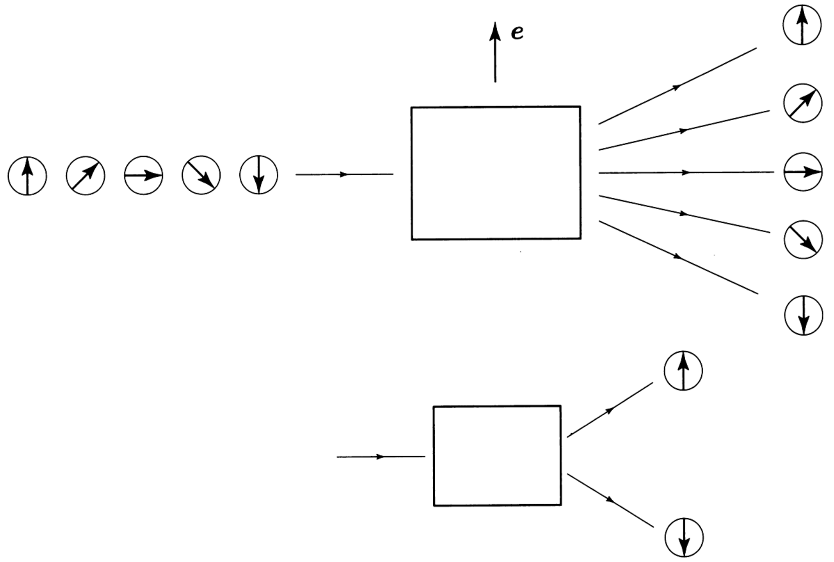


図 2.1

すなわち電子のスピン角運動量の成分を測る実験をおこなった．ビームの曲がる方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}$ とし，この装置を $\mathrm{SG}(\boldsymbol{e})$ と名づける．ビームは $\boldsymbol{e}$ の方に曲がるものと $-\boldsymbol{e}$ の方に曲がるものの 2 つに分かれ，中間はなかった．$\boldsymbol{e}$ の方に曲がったビームを別の $\mathrm{SG}(\boldsymbol{e})$ に入射すると，今度はつねに $\boldsymbol{e}$ の方に曲がった．

この結果は，**電子の磁気モーメントの成分は，互いに符号が反対で絶対値が等しい 2 つの値しかとらない**と解釈できる．これを『スピン角運動量の成分は』と言いかえてもよい．

電子のスピン角運動量の成分の取りうる 2 つの値を $\pm\hbar/2$ とする．実は，$\hbar$ はプランク定数 $h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\,\mathrm{sec}$ の $(2\pi)^{-1}$ 倍である．

$\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}'$ を長さ 1 の空間ベクトル，その間の角を $0 \leq \theta \leq \pi$ とする．スピン角運動量の $\boldsymbol{e}$ 成分の測定値がつねに $+\hbar/2$ である電子のスピン角運動量の $\boldsymbol{e}'$ 成分を測ると，測定値はランダムに $\pm\hbar/2$ のいずれかになる．値が $+\hbar/2$ である確率を p とすると，期待値 $(\hbar/2)p - (\hbar/2)(1-p)$ は $(\hbar/2)\boldsymbol{e}$ の $\boldsymbol{e}'$ 成分，すなわち $(\hbar/2)\cos\theta$ に一致する．すなわち $p = (1+\cos\theta)/2 = (\cos(\theta/2))^2$ となる．

まとめると，

1. 一つの状態に対する物理量の測定値は一般にランダムで，期待値だけが理論的にわかる．
2. 一つの物理量に対し，測定値がつねに同一であるような状態も存在する．

2.1.2 エルミート内積

シュテルン＝ゲルラッハの実験によると，電子のスピン角運動量の成分とい

う物理量が 2 つの値 $\pm\hbar/2$ しかとらないが，『どの方向の成分についてもそうである』ということをどう理解したらよいだろうか？ これに辻褄の合う解釈を与えるのが，複素ベクトル空間とエルミート内積の概念である．

定義 2.1.1 (1) 実または複素ベクトル空間 V 上の実数値関数 N が **半ノルム** であるとは，$N(au) = |a|N(u)$ $(a \in \mathbb{R}, \mathbb{C})$, $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ をみたすことをいう．さらに $N(u) = 0 \Rightarrow u = 0$ であるとき，N は **ノルム** であるという．ノルムはしばしば $N(u) = \|u\|$ と書かれる．ノルムを指定したベクトル空間を **ノルム空間** という．
(2) 複素ベクトル空間 V の 2 つの元 u, v に複素数 $\langle u, v\rangle$ を対応させるもので，v について線型であり，$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ をみたし，$\|u\| = \langle u, u\rangle$ がノルムを与えるものを，**エルミート内積** という．
(3) 線型写像 $A : V \to V$ に対し，$\langle A^\dagger u, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ $(u, v \in V)$ をみたす作用素 $A^\dagger : V \to V$ を A の **随伴** あるいは **エルミート共役** という．$A^\dagger = A$ のとき A は **エルミート作用素** であるといい，$A^\dagger = A^{-1}$ のとき A は **ユニタリ作用素** であるという．

エルミート作用素の固有値は複素共役で不変，すなわち実数になり，ユニタリ作用素の固有値は複素共役が逆数，すなわち絶対値 1 の複素数になる．さらに次が言える．

定理 2.1.1 エルミート内積をもつ有限次元複素ベクトル空間上のエルミート作用素は，エルミート内積に関する正規直交基底によって対角化される．すなわち，その固有ベクトルからなる正規直交基底が存在する．

量子力学では，系の状態がエルミート・ベクトル空間 V の 0 でないベクトル u で，物理量がエルミート作用素 $Q : V \to V$ で表され，状態 u に対する物理量 Q の測定値の期待値が $\langle u, Qu\rangle / \langle u, u\rangle$ で与えられる．したがって u が Q の固有ベクトルであるときには，測定値はつねに対応する固有値になる．

2.1.3 スピノルとホップ写像

空間ベクトルのなす実 3 次元内積ベクトル空間を E とし，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \in E$ が正規直交基底であるとする．

スピン角運動量の $\boldsymbol{e}_3$ 成分の測定値がつねに $+\hbar/2, -\hbar/2$ である電子の状態をそれぞれ $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ で表す．これらをベクトルと見なして，他の状態は $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ の 1 次結合として定式化する．これを状態の重ね合わせという．

$|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ を正規直交基底とするエルミート・ベクトル空間を S とする．S の元を **スピノル** とよぶ．

$\boldsymbol{e} = (\cos\theta)\boldsymbol{e}_3 + (\sin\theta)\boldsymbol{e}_1$ として θ を 0 から π まで動かすと，$\boldsymbol{e}$ は $\boldsymbol{e}_3$ から $-\boldsymbol{e}_3$ まで動く．このとき電子の状態 $s \in S$ は $|\uparrow\rangle$ から $|\downarrow\rangle$ まで動く．そこで，

スピン角運動量の $\boldsymbol{e}$ 成分の測定値がつねに $+\hbar/2$ である電子の状態がスピノル

$$s = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)|\uparrow\rangle + \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)|\downarrow\rangle \in S$$

で表されるとする．

状態 s の電子のスピン角運動量の $\boldsymbol{e}_3$ 成分が $+\hbar/2$ である確率は $|\cos(\theta/2)|^2$ であり，$-\hbar/2$ である確率は $|\sin(\theta/2)|^2$ である．すなわち係数の絶対値の 2 乗が確率を与えている．

$\theta \to \theta + 2\pi$ とするとき，$\boldsymbol{e}$ は変わらないが s は -1 倍になる．よって電子の状態に対応するスピノル s は磁気モーメントの向き $\boldsymbol{e}$ によって一つに決まらない．むしろスピノル s の関数として $\boldsymbol{e}$ が決まる．

スピノル s が 1 回転して元にもどると $\boldsymbol{e}$ は 2 回転する．2 回転で状態が元にもどるというと奇妙な感じがするが，たとえば一方の端が固定された帯のもう一方の端につないだボールは，1 回転すると帯がねじれ，2 回転して初めて元の状態にもどる．

今の $\boldsymbol{e}$ を $\boldsymbol{e}_3$ 軸のまわりに回転させ，

$$\boldsymbol{e} = (\cos\theta)\boldsymbol{e}_3 + (\sin\theta)[(\cos\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2]$$

とする．これに対しては，スピン角運動量の $\boldsymbol{e}$ 成分の測定値がつねに $+\hbar/2$ である電子の状態がスピノル

$$s = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\varphi/2}|\uparrow\rangle + \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{-i\varphi/2}|\downarrow\rangle \in S$$

で表されるとする．

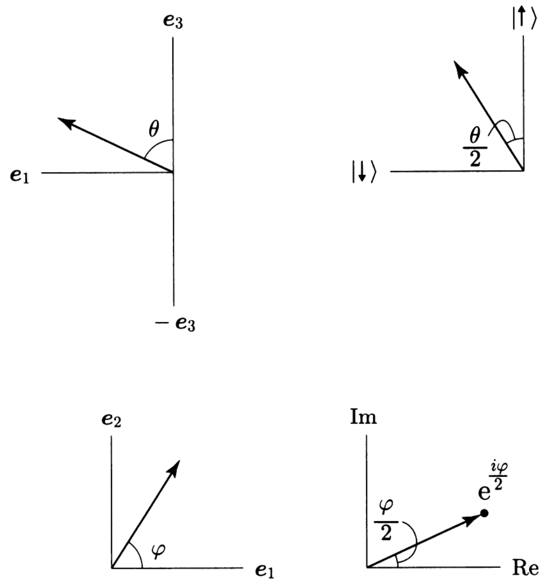


図 2.2

ノルムの定義された実ベクトル空間 V に対し，ノルム 1 の元全体のなす部分集合を $V(1)$ と書くことにする．

写像 $\eta : S(1) \to E(1), \eta\,(z\,|{\uparrow}\rangle + w\,|{\downarrow}\rangle) = (x_1, x_2, x_3)$ を

$$x + ix_2 = 2z\overline{w}, \quad x_3 = |z|^2 - |w|^2$$

によって定義し，これを **ホップ写像** という．倍角の公式より，$\eta(s) = \boldsymbol{e} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \in E(1)$ に対し，スピン角運動量の $\boldsymbol{e}$ 成分の測定値がつねに $+\hbar/2$ である電子の状態は，スピノル $s = z\,|{\uparrow}\rangle + w\,|{\downarrow}\rangle \in S(1)$ で表される．

ノルム 1 のスピノルで記述される電子の自由度を，電子の **スピン** とよぶ．

η は 3 次元球面 S^3 から 2 次元球面 S^2 への連続な全射である．$\eta(s) = \eta(s')$ であるのは $s' = \mathrm{e}^{i\alpha}s\ (\alpha \in \mathbb{R})$ と書けることに同値である．スピンの自由度のうち α の自由度を **位相** (phase) という．

電子の状態はスピノル $s \in S$ によって記述される．$\eta(s), \eta(s')$ のなす角を $0 \leq \theta \leq \pi/2$ とすると，$\cos(\theta/2) = |\langle s, s'\rangle|$ である．したがってシュテルン＝ゲルラッハの実験の結果を座標によらない形で述べると，

> $s, s' \in S(1)$ に対し，スピン角運動量の $\eta(s')$ 成分の測定値がつねに $+\hbar/2$ である電子の，スピン角運動量の $\eta(s)$ 成分の測定値がつねに $+\hbar/2$ である確率は $|\langle s, s'\rangle|^2$ になる

となる．複素数 $\langle s, s'\rangle$ を **振幅** という．その絶対値の 2 乗が確率を表す．

複素 2 次正方行列

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

を **パウリ行列** という．2 次単位行列を I と書くと，これらは

$$\sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j = 2\delta_{jk}I \quad \sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$$

をみたす．$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $\eta(s) = (x_1, x_2, x_3)$ とすると，s は行列 $\eta(s)\cdot\boldsymbol{\sigma} = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$ の固有値 1 の固有ベクトルである．

2.1.4 パウリ方程式

1924 年，ドブロイは，運動量 p の電子も光と同様に波長 $\lambda = h/p$ の波動だと主張した．そこで，運動量 $\boldsymbol{p}$，スピン角運動量の $\boldsymbol{e}_3$ 成分 $+\hbar/2, -\hbar/2$ の電子の状態を，$S = \mathbb{C}^2$ に値をとる $\boldsymbol{x}$ の関数

$$\left|\boldsymbol{p}, +\frac{\hbar}{2}\right\rangle = \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,|{\uparrow}\rangle, \quad \left|\boldsymbol{p}, -\frac{\hbar}{2}\right\rangle = \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,|{\downarrow}\rangle, \quad \boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$$

で表す．他の状態はこれらの重ね合わせ，

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}p_1\,\mathrm{d}p_2\,\mathrm{d}p_3 \left[f_+(\boldsymbol{p})\left|\boldsymbol{p}, +\frac{\hbar}{2}\right\rangle + f_-(\boldsymbol{p})\left|\boldsymbol{p}, -\frac{\hbar}{2}\right\rangle\right]$$

で表される．

エネルギー E，運動量 $\boldsymbol{p}$，スピン角運動量の状態 s の自由電子は，$S=\mathbb{C}^2$ に値をとる波動関数

$$\Psi(\boldsymbol{x},t)=\mathrm{e}^{-\omega t}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}s,\quad E=\hbar\omega,\quad \boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k},\quad s\in S$$

で記述される波動である．

電子の質量を m とする．遅い自由粒子のエネルギーと運動量の間の関係式 $E=\dfrac{1}{2m}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}$ を導くような，波動関数 $\Psi(\boldsymbol{x},t)$ のみたす偏微分方程式を考える．

Ψ が偏微分方程式

$$i\hbar\partial_t\Psi=\frac{1}{2m}(\boldsymbol{\sigma}\cdot(-i\hbar\nabla))^2\Psi$$

の解であるとすれば，$E=\dfrac{1}{2m}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}$ が導かれる．この偏微分方程式を自由電子のパウリ方程式とよぶ．

位相の自由度を取りかえて $\Psi\to\mathrm{e}^{i\lambda(\boldsymbol{x},t)}\Psi$ とすることを **ゲージ変換** という．自由電子のパウリ方程式は，ゲージ変換をすると形が変わってしまう．

そこで電子に力を及ぼす場 $A_0(\boldsymbol{x},t)$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=(A_1,A_2,A_3)$ によってパウリ方程式を変形する．すなわち S に値をとる関数 $\Psi(\boldsymbol{x},t)$ に関する偏微分方程式

$$(i\hbar\partial_t-A_0)\Psi=\frac{1}{2m}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2\Psi,\quad \hat{\boldsymbol{p}}=-i\hbar\nabla-\boldsymbol{A}$$

をパウリ方程式という．場は電磁場に他ならない．電磁場の方も変換させれば，パウリ方程式はゲージ変換

$$\Psi\to\mathrm{e}^{i\lambda(\boldsymbol{x},t)}\Psi,\quad A_0\to A_0-\hbar\partial_t\lambda,\quad \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}+\hbar\nabla\lambda$$

で不変になる．

こうして電子の磁気モーメントを考慮に入れた，遅い電子の波動方程式が得られた．

なお，1 階微分作用素 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}$ は後で述べる **ディラック作用素** の例である．2 乗すると磁場 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ の項が出現する．すなわち，

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2=\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}-\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}.$$

これは後で述べる **リヒネロヴィッツ公式** の例である．電磁場の中の電子のパウリ方程式は，

$$(i\hbar\partial_t-A_0)\Psi=\frac{1}{2m}\left(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}-\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\right)\Psi$$

と書ける．

$$\varPsi = \psi_+ \,|{\uparrow}\rangle + |\psi_- \,|{\downarrow}\rangle = \begin{bmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{bmatrix}, \quad \varPsi^\dagger = \begin{bmatrix} \overline{\psi_+} & \overline{\psi_-} \end{bmatrix},$$

$$|\varPsi|^2 = \varPsi^\dagger \varPsi = |\psi_+|^2 + |\psi_-|^2$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
\partial_t |\varPsi|^2 &= \varPsi^\dagger(\partial_t \varPsi) + (\partial_t \varPsi)^\dagger \varPsi \\
&= \frac{1}{2m\, i\hbar} \big(\varPsi^\dagger((i\hbar\nabla + \boldsymbol{A}) \cdot (i\hbar\nabla + \boldsymbol{A})\,\varPsi) \\
&\qquad\qquad -((-i\hbar\nabla + \boldsymbol{A}) \cdot (-i\hbar\nabla + \boldsymbol{A})\,\varPsi^\dagger)\,\varPsi \big) \\
&= \frac{1}{2m} \big(i\hbar(\varPsi^\dagger(\Delta \varPsi) - (\Delta \varPsi^\dagger)\,\varPsi)) + \varPsi^\dagger \nabla \cdot (\boldsymbol{A}\varPsi) + \varPsi^\dagger \boldsymbol{A} \cdot \nabla \varPsi \\
&\qquad\qquad +(\nabla \cdot (\boldsymbol{A}\varPsi^\dagger))\,\varPsi + \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \varPsi^\dagger)\,\varPsi \big) \\
&= \frac{1}{2m} \nabla \cdot \big(i\hbar(\varPsi^\dagger(\nabla \varPsi) - (\nabla \varPsi)^\dagger \varPsi) + 2\boldsymbol{A}\,|\varPsi|^2 \big)
\end{aligned}$$

より，連続の方程式がなりたつ．そこで，$|\varPsi(\boldsymbol{x}, t)|^2$ を，時刻 t に位置 $\boldsymbol{x}$ において電子が見出される（相対的）確率密度と解釈する．そのうち $|\psi_+(\boldsymbol{x}, t)|^2$ がスピン角運動量の $\boldsymbol{e}_1$ 成分が $\dfrac{\hbar}{2}$ である確率密度，$|\psi_-(\boldsymbol{x}, t)|^2$ がスピン角運動量の $\boldsymbol{e}_1$ 成分が $-\dfrac{\hbar}{2}$ である確率密度である．

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ の場合，パウリ方程式は

$$(i\hbar\partial_t - A_0)\,\varPsi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta \varPsi$$

となる．これはスピノル $\varPsi$ を $|{\uparrow}\rangle, |{\downarrow}\rangle$ の 1 次結合で書いたときの係数に対する偏微分方程式である．こちらを **シュレーディンガー方程式** という．

さらに $\varPsi = \mathrm{e}^{-Et/\hbar}\psi(\boldsymbol{x})s,\ s \in S$ とおいて得られる偏微分方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta + A_0(\boldsymbol{x}) \right) \psi(\boldsymbol{x}) = E\psi(\boldsymbol{x}) \tag{2.1}$$

を **定常シュレーディンガー方程式** という．作用素 $H = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\,\Delta + A_0(\boldsymbol{x})$ を **ハミルトニアン** とよぶ．

2.1.5 グリーン関数

シュレーディンガー方程式 $(i\hbar\partial_t - A_0)\psi = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi$ は t について 1 階の線型微分方程式なので，時刻 $t = t_0$ における初期条件によって解が一意的に決まり，その依存性は線型である．したがって，時刻 $t = t_1$ における値は，

$$\psi(\boldsymbol{x},\, t_1) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{x},\, t_1;\ \boldsymbol{u}, t_0)\, \psi(\boldsymbol{u},\, t_0)\, \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2\, \mathrm{d}u_3$$

のように書けると考えられる．このとき，$G(\boldsymbol{x},\, t_1;\ \boldsymbol{u}, t_0)$ を **グリーン関数** という．

2.2 1次元量子力学

2.2.1 自由電子の波動関数

簡単のため1つの空間座標 x にのみ着目する．

電子の質量を m とすると，運動量 p の自由電子のエネルギーは $E = \dfrac{1}{2m}p^2$ である．エネルギー $E > 0$ の自由電子の波動関数は，運動量 $\pm\hbar k$ $(k > 0)$ の電子の波動関数の1次結合

$$\psi(x) = C^+\mathrm{e}^{ikx} + C^-\mathrm{e}^{-ikx}, \quad E = \frac{1}{2m}\hbar^2k^2$$

で表される．

2.2.2 井戸型・箱型ポテンシャル

次にポテンシャル $V(x)$ の下にある電子の波動関数について考える．

まずポテンシャル $V(x)$ として，$\mathbb{R}$ から離散的な部分集合を除いたところで定義され，定義されている開区間上で定数であるものを考える．このような関数を階段関数あるいは局所定数という．これは定義域が連結でない1変数関数の不定積分の積分定数として自然に現れるものであり，たとえば

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log|x| + C$$

という公式の積分定数 C は $x > 0$, $x < 0$ で異なる値をとってよい局所定数である．

$V(x) \leq 0$ のものは井戸型ポテンシャル，$V(x) \geq 0$ のものは箱型ポテンシャルとよばれている．

ポテンシャル $V(x)$ の下で，エネルギー E の電子の波動関数 $\psi(x)$ を考える．ψ は $\mathbb{R}$ 上の有界かつ C^1 級な複素数値関数であるとする．

$$\psi(x) = C^+\mathrm{e}^{ikx} + C^-\mathrm{e}^{-ikx} \tag{2.2}$$

と書ける．k, C^+, C^- は $V(x)$ が一定である開区間上で定数であり，

$$E = \frac{1}{2m}(\hbar k)^2 + V$$

をみたすとする．

$E > V(x)$ である領域において波動関数は三角関数 $\cos kx$, $\sin kx$ の1次結合である．さらに $E < V(x)$ である領域においても k を純虚数とすれば波動関数を考えることができるのがおもしろいところである．$k = i\kappa$ $(\kappa > 0)$ とおくと波動関数は指数関数 $\mathrm{e}^{-\kappa x}$, $\mathrm{e}^{\kappa x}$ の1次結合になる..

このとき波動関数 $\psi(x)$ は，定常シュレーディンガー方程式

$$E\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right)\psi \tag{2.3}$$

をみたしている．

2.2.3 波動関数の接続公式

(2.2) において

$$k(x)=\begin{cases} k_1 & x<a \\ k_2 & x>a, \end{cases} \qquad C^{\pm}(x)=\begin{cases} C_1^{\pm} & x<a \\ C_2^{\pm} & x>a \end{cases}$$

である場合の波動関数

$$\psi(x)=\begin{cases} \psi_1(x) & x\leq a \\ \psi_2(x) & x\geq a, \end{cases} \qquad \psi_j(x)=C_j^{+}\mathrm{e}^{ik_jx}+C_j^{-}\mathrm{e}^{-ik_jx}, \quad j=1,2$$

を考える．波動関数 $\psi(x)$ は C^1 級だから，

$$\psi_1(a)=\psi_2(a), \quad \psi_1'(a)=\psi_2'(a).$$

よって

$$A_j=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{ik_ja} & \mathrm{e}^{-ik_ja} \\ ik_j\mathrm{e}^{ik_ja} & -ik_j\mathrm{e}^{-ik_ja} \end{bmatrix}$$

とおくと，

$$A_1\begin{bmatrix} C_1^{+} \\ C_1^{-} \end{bmatrix}=A_2\begin{bmatrix} C_2^{+} \\ C_2^{-} \end{bmatrix}.$$

k_1, k_2 が実数の場合，複素共役を取ると A_j の 2 つの列がいれかわるので，

$$A_1\begin{bmatrix} C_1^{+} & \overline{C_1^{-}} \\ C_1^{-} & \overline{C_1^{+}} \end{bmatrix}=A_2\begin{bmatrix} C_2^{+} & \overline{C_2^{-}} \\ C_2^{-} & \overline{C_2^{+}} \end{bmatrix}.$$

両辺の行列式を比べることにより，接続公式

$$k_1(|C_1^{+}|^2-|C_1^{-}|^2)=k_2(|C_2^{+}|^2-|C_2^{-}|^2) \tag{2.4}$$

を得る．k_1 が実数，$k_2=i\kappa$ が純虚数の場合，A_2 は実行列なので，

$$A_1\begin{bmatrix} C_1^{+} & \overline{C_1^{-}} \\ C_1^{-} & \overline{C_1^{+}} \end{bmatrix}=A_2\begin{bmatrix} C_2^{+} & \overline{C_2^{+}} \\ C_2^{-} & \overline{C_2^{-}} \end{bmatrix}.$$

両辺の行列式を比べることにより，接続公式

$$k_1(|C_1^{+}|^2-|C_1^{-}|^2)=i\kappa(C_2^{+}\overline{C_2^{-}}-C_2^{-}\overline{C_2^{+}}) \tag{2.5}$$

を得る．

2.2.4 トンネル効果

$a>0$ に対し，ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x < 0,\ x > a \end{cases}$$

の下のエネルギー $E > 0$ の波動関数を考える．これに対し，

$$E = \frac{1}{2m}\hbar^2 k^2 = \frac{1}{2m}\hbar^2 {k_0}^2 + V_0$$

によって k, k_0 を定める．k は実数である．k_0 は，$E \geq V_0$ のとき実数，$E < V_0$ のとき純虚数である．波動関数を

$$\psi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{ikx} + C_1^- \mathrm{e}^{-ikx} & x \leq 0 \\ C_2^+ \mathrm{e}^{ik_0 x} + C_2^- \mathrm{e}^{-ik_0 x} & 0 \leq x \leq a \\ C_3^+ \mathrm{e}^{ikx} & x \geq a \end{cases}$$

とおく．e^{ikx} $(x < 0)$ が入射波，$C_1^- \mathrm{e}^{-ikx}$ $(x < 0)$ が反射波，$C_3^+ \mathrm{e}^{ikx}$ $(x > a)$ が透過波である．波動関数 $\psi(x)$ が C^1 級であるという条件は，C_1^-, C_2^+, C_2^-, C_3^+ に関する 4 つの 1 次方程式になる．

$E > V_0$ の場合，接続公式 (2.4) より，

$$k(1 - |C_1^-|^2) = k_0(|C_2^+|^2 - |C_2^-|^2) = k|C_3^+|^2.$$

よって $|C_1^-|^2 + |C_3^+|^2 = 1$ を得る．

また $E < V_0$ の場合，接続公式 (2.5) より，

$$k(1 - |C_1^-|^2) = k_0(C_2^+ \overline{C_2^-} - C_2^- \overline{C_2^+}) = k|C_3^+|^2.$$

やはり $|C_1^-|^2 + |C_3^+|^2 = 1$ を得る．この場合にも透過波が存在しうる．これを**トンネル効果** という．

2.3 熱核

2.3.1 エントロピー

状態の集合を I とし，状態 $i \in I$ の重み（確率）が $0 \leq p_i \leq 1$ であるとする．$\displaystyle\sum_{i \in I} p_i = 1$ である．状態 i の情報量を，この状態を特定するのに必要な「はい／いいえ」で答える質問の回数 $\log_2 \dfrac{1}{p_i} = -\dfrac{\log p_i}{\log 2}$ で測るとき，その期待値の定数倍である

$$S = -k \sum_{i \in I} p_i \log p_i \quad (k > 0)$$

を確率分布 $(p_i)_{i \in I}$ の **エントロピー** という．以下 $k = 1$ とする．

2.3.2 カノニカル分布・分配関数・熱核

状態 $i \in I$ のエネルギーを E_i とするとき，確率の保存とエネルギー保存則

$$\sum_{i\in I} p_i = 1, \quad \sum_{i\in I} p_i E_i = U$$

の下でエントロピー S が最大になるような確率分布を **カノニカル分布** という．

ラグランジュ未定乗数法を用いて，

$$\widetilde{S} = S - \lambda(\sum p_i - 1) - \beta(\sum p_i E_i - U)$$

とおき，

$$\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial p_i} = -\log p_i - p_i \frac{1}{p_i} - \lambda - \beta E_i = 0$$

を課すと，$p_i = \mathrm{e}^{-1-\lambda-\beta E_i}$ が得られる．そこで $Z = \mathrm{e}^{1+\lambda}$ とおくと，

$$p_i = \frac{1}{Z}\mathrm{e}^{-\beta E_i}, \quad Z = \sum_{i\in I} \mathrm{e}^{-\beta E_i}, \quad U = -\frac{\partial}{\partial \beta}\log Z.$$

$Z(\beta)$ を **分配関数** という．収束のことを考えて，有限個の $i \in I$ を除いて $E_i > 0$ とし，$\beta > 0$ とするのが普通である．

正規直交基底 $(|i\rangle)_{i\in I}$ の張るエルミート・ベクトル空間 $\mathcal{S}$ 上のエルミート作用素 $\mathcal{H} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ が $\mathcal{H}|i\rangle = E_i|i\rangle$ をみたすとする．$|i\rangle$ と $|j\rangle$ のエルミート内積を $\langle i|j\rangle$ と書く．$\langle j|i\rangle = \overline{\langle i|j\rangle}$ である．分配関数は

$$Z(\beta) = \sum_{i\in I} \langle i|\mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}}|i\rangle = \mathrm{tr}\ \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}}$$

で表される．ここで $(\partial_\beta + \mathcal{H})\mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}}|i\rangle = 0$, $\lim_{\beta\to 0} \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}}|i\rangle = |i\rangle$ である．行列 $(\langle i|\mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}}|j\rangle)_{i,\,j\in I}$ を $\mathcal{H}$ の **熱核** という．

2.3.3 シュレーディンガー方程式と熱核

ベクトル $\psi \in \mathcal{S}$ が，$\mathbb{R}^3$ 上の複素数値 C^1 関数 $\psi(\boldsymbol{x})$ に対応し，エルミート内積が

$$\langle \psi \mid \psi' \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi(\boldsymbol{x})}\, \psi'(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3$$

によって与えられ，$\mathcal{H} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{x})$ である場合を考える．点 $\boldsymbol{x}$ があたかもベクトル $|\boldsymbol{x}\rangle$ に対応するように考え，$\psi(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}|\psi\rangle = \overline{\langle \psi|\boldsymbol{x}\rangle}$ と書く．このとき，

$$\langle \psi \mid \psi' \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \langle \psi|\boldsymbol{x}\rangle\, \langle \boldsymbol{x}|\psi'\rangle\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3$$

と書ける．これはまるで $|\boldsymbol{x}\rangle$ が $\mathcal{S}$ の，連続パラメータの添字をもつ正規直交基底であるかのようである．

$\mathbb{R}^m$ 上の複素数値 C^∞ 関数であってある有界集合の外で 0 になるものを **テスト関数** といい，それら全体のなす複素ベクトル空間を $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ とする．

関数 $U(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ であって，$(\partial_t + \mathcal{H}_{\boldsymbol{x}})U = 0$ をみたし，任意のテスト関数 φ に対し

$$\lim_{t \to +0} \int_{\mathbb{R}^3} U(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, \varphi(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \mathrm{d}y_3 = \varphi(\boldsymbol{x})$$

をみたすものを，$\mathcal{H}$ の **熱核** という．これを形式的に $U(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \langle \boldsymbol{x} | \mathrm{e}^{-t\mathcal{H}} | \boldsymbol{y} \rangle$ と書く．

2.3.4 自由粒子の熱核とその漸近展開

自由粒子の場合，すなわち $V = 0$, $\mathcal{H} = -\Delta$ に対する熱核について考えよう．$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $\Delta = \sum_{j=1}^m {\partial_j}^2$, $t > 0$ とし，

$$\begin{aligned} U = \langle \boldsymbol{x} | \mathrm{e}^{t\Delta} | \boldsymbol{y} \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{-t\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} + i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{\xi}}\, \mathrm{d}\xi_1 \cdots \mathrm{d}\xi_m \\ &= (4\pi t)^{-m/2} \mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2/4t} \end{aligned}$$

と定義し，テスト関数 φ に対し，

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{x} | \mathrm{e}^{t\Delta} | \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^m} U(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, \varphi(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_m \\ &= (4\pi)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\|u\|^2}\, \varphi(\boldsymbol{x} + \sqrt{t}\, \boldsymbol{u})\, \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_m \end{aligned}$$

とおく．すると，$(\partial_t + \mathcal{H}_{\boldsymbol{x}})U = 0$ かつ任意のテスト関数 φ に対し，

$$\lim_{t \to +0} \langle \boldsymbol{x} | \mathrm{e}^{t\Delta} | \varphi \rangle = \varphi(\boldsymbol{x}).$$

さて，$\mathrm{e}^{t\Delta}$ は形式的に $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \Delta^n$ と書けるが，その意味は何だろう．

$m = 1$ の場合，テイラー展開

$$\varphi(x + \sqrt{t}\, u) = \sum_{k=0}^{l} \frac{t^{k/2}}{k!} \varphi^{(k)}(x)\, u^k + O(t^{(l+1)/2}) \quad (t \to +0),$$

を考える．ここで，$f(t) = O(t^N)$ $(t \to +0)$ とは，$\displaystyle\lim_{t \to +0} f(t)\, t^{-N}$ が有界であることである．そして

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2/4} u^k \, \mathrm{d}u = \begin{cases} \dfrac{k!}{(k/2)!} & k : \text{偶数} \\ 0 & k : \text{奇数} \end{cases}$$

より，漸近展開

$$\langle x | \mathrm{e}^{t\Delta} | \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{N} \frac{t^j}{j!} \Delta^j \varphi(x) + O(t^{N+1})$$

が得られる．これを

$$\langle x|\mathrm{e}^{t\Delta}|\varphi\rangle \sim \sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}\Delta^j\varphi(x)$$

と書くことにする．次元 m が一般の場合も，u_j の奇数乗の Gauss 積分が消えることから，漸近展開

$$\langle \boldsymbol{x}|\mathrm{e}^{t\Delta}|\varphi\rangle \sim \sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}\Delta^j\varphi(\boldsymbol{x})$$

が得られる．

2.3.5　フィルトレーション

漸近展開を抽象化したのがフィルトレーションをもつアーベル群の概念である．

アーベル群 C の部分群の列 $F^pC \supset F^{p+1}C \quad (p \in \mathbb{Z})$ を，C 上の（減少）**フィルトレーション** という．以下，$\bigcup_p F^pC = C$, $\bigcap_p F^pC = 0$ とする．$\mathrm{gr}_F^p C = F^pC/F^{p+1}C$ とおいて，C の近似として部分商の直和 $\bigoplus_p \mathrm{gr}_F^p C$ を調べる．

フィルトレーションつきアーベル群 $F^\bullet C$ から $F'^\bullet C'$ への **射** とは，準同型 $\varphi : C \to C'$ で $\varphi(F^pC) \subset F'^pC'$ をみたすものである．これは部分商 $\mathrm{gr}_F^p C$ から $\mathrm{gr}_{F'}^p C'$ への準同型を誘導する．これがすべての $p \in \mathbb{Z}$ に対して同型ならば，φ も同型である．

アーベル群をベクトル空間におきかえても同様の概念が定義される．

$\mathbb{R}_{>0}$ を正の実数全体の集合とし，$C = C^\infty(\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n)$ とする．ベクトル空間 C 上のフィルトレーションを，

$$F^pC = \{f \in C \mid f = O(t^p)\ (t \to +0)\}, \quad p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

によって定義すると，漸近展開

$$f(t) = \sum_{j=0}^{N} a_j t^j + O(t^{N+1}), \quad (t \to +0), \quad N = 0, 1, 2, \ldots,$$

は，各 $p \geq 0$ に対し，$f(t) - \sum_{j=0}^{p-1} a_j t^j$, $a_p t^p \in F^pC$ が $\mathrm{gr}_F^p C = F^pC/F^{p+1}C$ において等しい（より正確にいえば，属する同値類が等しい）ということである．

2.3.6　熱核の構成の考え方

有限次元 $\mathbb{C}$ 代数 A と $H \in A$ に対し，$K_t \in A\ (t > 0)$ を C^1 級写像とし，

$$K_0 = 1, \quad R_t = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + H\right) K_t \in O(t^\alpha), \quad \alpha \geq 0$$

であるとする．$Q_t^{(0)} = K_t$, $R^{(1)}(t) = R_t$ とおくと，

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+H\right)Q_t^{(0)} = R^{(1)}(t).$$

そこで

$$Q_t^{(1)} = \int_0^t K_{t-s}R^{(1)}(s)\,\mathrm{d}s, \quad R^{(2)}(t) = \int_0^t R_{t-s}R^{(1)}(s)\,\mathrm{d}s$$

とおくと,

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+H\right)Q_t^{(1)} = \int_0^t R_{t-s}R^{(1)}(s)\,\mathrm{d}s + R^{(1)}(s) = R^{(2)}(t) + R^{(1)}(t).$$

続いて

$$Q_t^{(2)} = \int_0^t K_{t-s}R^{(2)}(s)\,\mathrm{d}s, \quad R^{(3)}(t) = \int_0^t R_{t-s}R^{(2)}(s)\,\mathrm{d}s$$

とおくと,

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+H\right)Q_t^{(2)} = \int_0^t R_{t-s}R^{(2)}(s)\,\mathrm{d}s + R^{(2)}(s) = R^{(3)}(t) + R^{(2)}(t).$$

そこで，帰納的に

$$Q_t^{(n)} = \int_0^t K_{t-s}R^{(n)}(s)\,\mathrm{d}s, \quad R^{(n+1)}(t) = \int_0^t R_{t-s}R^{(n)}(s)\,\mathrm{d}s$$

とおくと,

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+H\right)Q_t^{(n)} = \int_0^t R_{t-s}R^{(n)}(s)\,\mathrm{d}s + R^{(n)}(s) = R^{(n+1)}(t) + R^{(n)}(t).$$

このとき,

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+H\right)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k Q_t^{(k)} = (-1)^n R^{(n+1)}(t).$$

証明は略すが，さらに次が言える.

定理 2.3.1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n Q_t^{(n)}$ は H の熱核 e^{-tH} に収束し, $\mathrm{e}^{-tH} = K_t + O(t^{\alpha+1})$ である.

そして $t\Delta^n = \{(t_1, \ldots, t_n) \mid 0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t_{n+1} = t\}$ とおくと.

$$Q_t^{(n)} = \int_{t\Delta^n} K_{t-t_n}R_{t_n-t_{n-1}}\cdots R_{t_2-t_1}R_{t_1}\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n$$

と表される.

A が無限次元の代数であるときも，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n Q_t^n$ の収束を示すことができる状況ならば，この方針で H の熱核 e^{-tH} が構成できるだろう.

2.3.7 幾何単体

ここで出てきた集合 $t\Delta^n$ について補足する．これは区間 $[0, t]$ の分割をパラメトライズする空間であった．

非負整数 n に対し，$[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$ とおく．区間 $[0, 1)$ から $[n]$ への順序を保つ右連続写像全体の集合を n 次元 **幾何単体** といい，Δ^n と書く．Δ^n の各点 $\xi : [0, 1) \to [n]$ は，$\xi^{-1}(j) = [x_j, x_{j+1})$ $(j \in [n])$ により，

$$(x_1, \ldots, x_n), \quad 0 = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} = 1$$

と 1 対 1 に対応する．この対応により Δ^n は $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合と見なすことができるので，コンパクト距離空間になる．順序を保つ写像 $f : [n] \to [m]$ は連続写像 $f_* : \Delta^n \to \Delta^m$, $f_*(\xi) = f \circ \xi$ を誘導する．

$I \subset [n]$ に対し，写像 $\mathrm{f}_I : [n - |I|] \to [n]$ を順序を保つ単射で像が $[n] \setminus I$ であるものとする．$i \in [n]$ に対し，$\mathrm{f}_i = \mathrm{f}_{\{i\}}$ とする．f_i およびこれの誘導する連続写像 $\mathrm{f}_{i*} : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ を **面写像** という．$i, j \in [n+1], i < j$ に対し，$\mathrm{f}_j\mathrm{f}_i = \mathrm{f}_i\mathrm{f}_{j-1} = \mathrm{f}_{\{i, j\}} : [n-1] \to [n+1]$ がなりたつ．

2.4 調和振動子とその熱核

2.4.1 調和振動子とエルミート多項式

ここでポテンシャルが $V(x) = \dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$ $(m > 0,\ \omega > 0)$ の場合を考える．

このポテンシャルに対する運動方程式は，位置 $x(t)$ と運動量 $p(t)$ に対して，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{m}, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -m\omega^2 x$$

と書け，解は，$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ と書ける．これは角振動数 ω の調和振動子（単振動）である．エネルギー $\dfrac{1}{2m}p^2 + \dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$ が E 以下であるような x-p 平面上の領域の面積は，$2\pi\omega^{-1}E$ である．

このポテンシャルに対する定常シュレーディンガー方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi = E\psi$$

を考える．古典力学では等速直線運動している粒子と見なしたものの波動関数が e^{ikx} で与えられたわけだが，古典力学で振動しているものの波動関数はどうなるのだろうか？

$\sqrt{\dfrac{m\omega}{\hbar}}\,x$ を改めて x とおくと，シュレーディンガー方程式は

$$\hbar\omega\left(-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}x^2\right)\psi = E\psi \tag{2.6}$$

となる．

ここで

$$e^{2ux-u^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} H_n(x)$$

とおくと，$H_n(x)$ は n 次多項式になる．

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad \ldots.$$

これを **エルミート多項式** という．

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot e^{-(x-u-v)^2} = \sqrt{\pi}$$

より，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot e^{-x^2} e^{2ux-u^2} e^{2vx-v^2} = \sqrt{\pi}\, e^{2uv}.$$

よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) = \sqrt{\pi}(n!)2^n \delta_{mn}.$$

すなわち

$$\frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{(n!)2^n}}\, e^{-x^2/2} H_n(x), \quad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

は内積

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot f(x) g(x)$$

に関して正規直交である．これらは L^2 関数の完全正規直交系をなす．

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2\right) e^{-x^2/2} e^{2ux-u^2} = (-(-x+2u)^2 + 1 + x^2) e^{-x^2/2} e^{2ux-u^2}$$
$$= (4ux - 4u^2 + 1) e^{-x^2/2} e^{2ux-u^2} = \left(2u\frac{\partial}{\partial u} + 1\right) e^{-x^2/2} e^{2ux-u^2}$$

より，

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right) e^{-x^2/2} H_n(x) = (2n+1)\, e^{-x^2/2} H_n(x).$$

したがって，

$$E = E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad \psi(x) = e^{-x^2/2} H_n(x), \quad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

がシュレーディンガー方程式 (2.6) の解を与える．

2.4.2 ボーア＝ゾンマーフェルトの量子化規則

調和振動子は，エネルギー最小の状態，すなわち $n = 0$ のときでもエネルギーは 0 でない．この状態を **零点振動** という．このようにエネルギー最小の状態，すなわち安定状態が自明なものでないことが，量子力学の特徴である．

ラザフォードらの実験により，原子の中心に正の電荷をもつ粒子があることが明らかになったが，電子が原子核の周りを回っているとすると電磁波を発してエネルギーを失い原子がつぶれてしまう，古典力学は原子のように安定しているものの記述が苦手なのである．

しかしゾンマーフェルトは，ボーアの原子模型の成功を受け，『エネルギー最小の状態は謎だがエネルギーが与えられた値以下の状態の個数には古典力学における対応物がある』ことを見出した．調和振動子の場合で言うと，エネルギーが E 以下の状態の個数は $(\hbar\omega)^{-1}E$ くらいであり，一方古典力学ではエネルギーが E 以下の x-p 平面の領域の面積は $2\pi\omega^{-1}E$ であった．両者を比べると，『x-p 平面における面積有限の領域は，面積がおよそプランク定数 $h = 2\pi\hbar$ あたり 1 個の割合で，有限個の状態に対応する』と考えることができる．この面積と状態数の対応は，状態数が多いほど正確になるだろう．この対応を **ボーア＝ゾンマーフェルトの量子化規則** という．

2.4.3 調和振動子の熱核

2.4.1 節の完全正規直交系を用いて

$$U(t,\, x,\, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}H_n(x)\cdot e^{-y^2/2}H_n(y)}{\sqrt{\pi}(n!)2^n}\, q^{n+\frac{1}{2}} \quad (q = e^{-t},\ t > 0)$$

とおくと，L^2 関数 $\varphi(x)$ に対し．

$$\lim_{t\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} U(t,\, x,\, y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \varphi(x).$$

また，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}x^2\right)\, e^{-x^2/2}H_n(x)e^{-(n+\frac{1}{2})t} = 0$$

より，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}x^2\right)\, U = 0.$$

すなわち U は調和振動子のハミルトニアン $-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{1}{2}x^2$ に対する熱核である．さらに，

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\cdot e^{-(\xi+i(u-x))^2} = \sqrt{\pi}$$

より

$$e^{2ux-u^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{x^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\cdot e^{-\xi^2+2ix\xi}e^{-2iu\xi}.$$

よって積分表示

$$H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{x^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\cdot e^{-\xi^2+2ix\xi}(-2i\xi)^n$$

が得られる．これを用いると，

$$\frac{H_n(x)H_n(y)}{(n!)2^n}q^n$$
$$= \frac{1}{\pi}e^{x^2+y^2}\iint_{\mathbb{R}^2} d\xi\, d\eta \cdot e^{-\xi^2+2ix\xi}e^{-\eta^2+2iy\eta}\frac{(-2i\xi)^n(-2i\eta)^n(\frac{q}{2})^n}{n!}.$$

よって，

$$U = \frac{1}{\pi^{3/2}}q^{1/2}e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\iint_{\mathbb{R}^2} d\xi\, d\eta \cdot e^{-\xi^2+2ix\xi}e^{-\eta^2+2iy\eta}e^{-2q\xi\eta}.$$

右辺の積分を実行すると，

$$\begin{aligned}
&-\xi^2+2ix\xi-\eta^2+2iy\eta-2q\xi\eta+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\\
&=-(\xi+q\eta-ix)^2+(q\eta-ix)^2-\eta^2+2iy\eta+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\\
&=-(\xi+q\eta-ix)^2-(1-q^2)\eta^2-2i(qx-y)\eta-x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\\
&=-(\xi+q\eta-ix)^2-(1-q^2)\left(\eta+i\frac{qx-y}{1-q^2}\right)^2\\
&\quad-\frac{(qx-y)^2}{1-q^2}-x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\\
&=-(\xi+q\eta-ix)^2-(1-q^2)\left(\eta+i\frac{qx-y}{1-q^2}\right)^2\\
&\quad+\frac{4qxy-(1+q^2)(x^2+y^2)}{2(1-q^2)}
\end{aligned}$$

より，

$$U(t,x,y)=\sqrt{\frac{q}{\pi(1-q^2)}}\exp\frac{4qxy-(1+q^2)(x^2+y^2)}{2(1-q^2)} \tag{2.7}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sinh(t)}}\exp\frac{2xy-\cosh(t)(x^2+y^2)}{2\sinh(t)}. \tag{2.8}$$

これをメーラーの公式という．したがって，n 次元調和振動子のハミルトニアン $\frac{1}{2}(-\Delta+\|\boldsymbol{x}\|^2)$ に対する熱核は，

$$U(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(2\pi\sinh(t))^{-n/2}\exp\frac{2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}-\cosh(t)(\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2)}{2\sinh(t)}$$

である．特に，

$$U(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=(2\pi\sinh(t))^{-n/2}\,\mathrm{e}^{-\tanh(\frac{t}{2})\cdot\|\boldsymbol{x}\|^2},$$
$$\int_{\mathbb{R}^n}U(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=(2\sinh(\frac{t}{2}))^{-n}.$$

また，$n=2$ とし，ハミルトニアン

$$\mathcal{H}'=\frac{1}{2}\left[(-i\partial_1+x_2)^2+(-i\partial_2-x_1)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}(-{\partial_1}^2 - {\partial_2}^2 + {x_1}^2 + {x_2}^2) + i(x_1\partial_2 - x_2\partial_1)$$

を考える．

$$[x_1\partial_2 - x_2\partial_1,\, {\partial_1}^2 + {\partial_2}^2] = 0, \quad [x_1\partial_2 - x_2\partial_1,\, {x_1}^2 + {x_2}^2] = 0$$

に注意すると，

$$\begin{aligned}
U'\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2 &= \mathrm{e}^{-it(x_1\partial_2 - x_2\partial_1)}\,U\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2 \\
&= \exp\left[\frac{-it(x_1y_2 - x_2y_1)}{\sinh(t)}\right] U\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2 \\
&= (2\pi t)^{-1}\frac{t}{\sinh(t)}\,\exp\left[\frac{t}{\sinh(t)}\,W'\right]\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2, \\
W' &= -i(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} - \cosh(t)(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2)}{2t}
\end{aligned}$$

とおくとき，$U'(t,\,\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})$ は $\mathcal{H}'$ の熱核である．

第 3 章
ファイバー束と管状近傍

幾何学は図形を測るが，トポロジーは数える．

トポロジーは，図形をぐにゃぐにゃと変形しても変わらないその図形の本質を問題にする．長さや角度や面積を測ってもそれは図形を変形したら変わってしまうわけで，じゃあどうするかというと，測るのではなく数えるのである．たとえば，図形をたがいに横断的に交わるように配置し，その交叉を数えると，その数は図形をちょっと変形しても変わらない．たくさん変形すると交叉の個数も変わってしまうが，交叉の個数が変わるのが 2 つの交叉がくっつくときに限るという状況だったら，個数の偶奇は変わらない．

さて，他の図形と横断的になるように図形を変形させるためには，図形が自由に動けるゆとり—管状近傍が必要になる．そして管状近傍は，図形に沿う方向と図形を動かす方向という区別された 2 種類の自由度をもつ空間，ファイバー束の構造をもつ．そして 2 つの図形の交叉が横断的であるとは，一方の図形を動かす方向がもう一方の図形に沿う方向になっているということである．

交叉の数え上げは管状近傍における積分によっても可能である．何を積分するかというと，それがトム形式である．トポロジーを学ぶと金太郎飴のようにどこで切ってもトム形式が出てくるが，トム形式とはどんなものかと言うとこれがまた金太郎飴によく似ている．すなわち，どこを切って積分しても同じ値が出てくるという大きい自由がある．このような概念を考えるのは，できるかぎり大きい自由の下で数えたいからである．

このように，横断性・管状近傍・ファイバー束・トム形式がトポロジーの基礎部分となっているのである．

3.1 多様体とファイバー束

3.1.1 位相多様体

多様体とは『どこを取っても $\mathbb{R}^n$ の開集合のように見える』というある意味

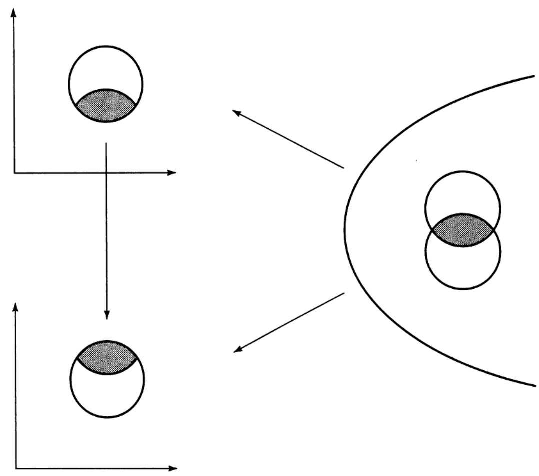


図 3.1

で退屈な図形である．位相空間の上にそのような構造を吹きつけて，微分積分という絵の具が使えるキャンバスに整えるのである．

位相空間 M の開集合の族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ で $M=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha$ となるものを，M の **開被覆** という．以下，$U_{\alpha\beta}=U_\alpha\cap U_\beta$, $U_{\alpha\beta\gamma}=U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$ などと略記する．

ハウスドルフ空間 M が n 次元 **位相多様体** であるとは, M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ が存在して，各 U_α が $\mathbb{R}^n$ の開集合に同相であることである．$\mathbb{R}^n$ の開集合の上への同相 $\varphi_\alpha:U_\alpha\to\mathbb{R}^n$ を **局所座標系**, $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ を **座標近傍**, $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ を **座標近傍系** といい，$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}:\varphi_\beta(U_{\alpha\beta})\to\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})$ を **座標変換** という．φ_α の各成分を U_α 上の関数と見なして，$\varphi_\alpha=(x_\alpha^1,\ldots,x_\alpha^n)$ のように書くこともある．

$S^n=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n+1}\mid\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=1\}$ を n 次元球面という．これは n 次元位相多様体である．

たがいに同相な位相多様体の次元は等しい．これはそんなに自明なことではなく（ペアノ曲線が $I=[0,1]$ から I^2 への連続な全射だったことを思い出そう），次の定理の帰結である．証明は後で与える（定理 10.3.8)．$n=1$ の場合は中間値の定理から言える．

ボルスク＝ウラムの定理　任意の連続写像 $f:S^n\to\mathbb{R}^n$ に対し, $f(\boldsymbol{x})=f(-\boldsymbol{x})$ となる点 $\boldsymbol{x}\in S^n$ が存在する．

この定理より，$\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への連続な単射が存在するならば $m\le n$ である．特に $\mathbb{R}^m$ の開集合と $\mathbb{R}^n$ の開集合が同相ならば $m=n$ である．したがって位相多様体 M,N がたがいに同相ならば M,N の次元は等しい．

3.1.2 C^∞ 多様体

位相多様体 M 上に任意の座標変換が C^∞ 写像であるような座標近傍系 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ が与えられているとき，$(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda})$ を C^∞ **多様体**という．以下，多様体と言ったら C^∞ 多様体のこととする．

K を実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$ とする．多様体 $(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda})$ に対し，連続関数 $f: M \to K$ が C^∞ 関数であるとは，任意の $\alpha \in \Lambda$ に対し $f\circ\varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha) \to K$ が C^∞ 関数であることとする．M 上の C^∞ 関数全体のなす K ベクトル空間を $C^\infty(M)$ と書く．これは可換 K 代数である．フーリエ解析の力を借りたいときなどは，複素数値関数を考えた方が便利である．

m 次元多様体 $(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda})$ と n 次元多様体 $(M', \{(U'_{\alpha'}, \varphi'_{\alpha'})\}_{\alpha'\in\Lambda'})$ に対し，連続写像 $f: M \to M'$ が C^∞ 写像であるとは，任意の $\alpha \in \Lambda$, $\alpha' \in \Lambda'$ に対し $\varphi'_{\alpha'}\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha\cap f^{-1}(U'_{\alpha'})) \to \mathbb{R}^n$ が C^∞ 写像であることと定義する．C^∞ 写像 $\varphi: M \to N$ は K 代数の準同型 $\varphi^*: C^\infty(N) \to C^\infty(M)$, $f \mapsto f\circ\varphi$ を誘導する．

C^∞ 写像 $f: M \to M'$ が同相で逆も C^∞ 写像であるとき，f を **微分同相** という．微分同相 $f: M \to M'$ が存在するとき，M と M' は微分同相であるという．これは多様体の間の同値関係である．

この同値関係は同相より真に細かいが，それは全く自明ではない．1956 年にミルナーは，7 次元球面と同相だが微分同相でない C^∞ 多様体（異種 7 次元球面）を構成した．構成は **ファイバー束** によって，同相であることの証明は **モース理論** によって，微分同相でないことの証明は **特性類** と **同境理論** によってなされた．epoch-making とは正にこのような仕事のことを言うのだろう．

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ にも勿論自然に C^∞ 多様体の構造が入っている．$\mathbb{R}^n$ に同相な C^∞ 多様体は $\mathbb{R}^n$ に微分同相だろうか？ 答えは，$n \neq 4$ のときイエス，$n = 4$ のときだけノーである．$\mathbb{R}^4$ に同相だが微分同相でない C^∞ 多様体（異種 $\mathbb{R}^4$）の，構成および同相であることの証明はキャッソン・ハンドルの理論によって，微分同相でないことはドナルドソンのゲージ理論を用いて証明された．

n 次元多様体 M の部分集合 S が余次元 k の **部分多様体** であるとは，S の各点に対し，そのまわりの M の座標近傍 $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ が存在して，

$$S \cap U = \{p \in U \mid x^1(p) = \cdots = x^k(p) = 0\}$$

と書けるものをいう．このとき S は自然に $n-k$ 次元多様体になり，包含写像 $S \to M$ は C^∞ 写像になる．余次元 1 の部分多様体を **超曲面** という．部分多様体であって閉集合であるものを閉部分多様体という．

座標変換により強い制限を課すことにより，次の概念を定義することができる．$2n$ 次元位相多様体 M 上に任意の座標変換が $\mathbb{C}^n$ の開集合から $\mathbb{C}^n$ への正則写像であるような座標近傍系 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ が与えられているとき，

$(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda})$ を n 次元 **複素多様体** という．C^∞ 多様体の場合と同様に，複素多様体の間の正則写像を定義することができる．複素多様体ならば C^∞ 多様体でもある．

3.1.3 ファイバー束

定数 $a_1, \ldots, a_m$ と変数 $x_1, \ldots, x_n$ の入った式を計算するとき，私たちは 2 つの視点から物を見ている．すなわち，(a_i) を止め (x_j) だけを動かして考えるか，(a_i) も (x_j) も動かして考えるかである．これは，(a_i) を多様体 B の局所座標，(x_j) を多様体 F の局所座標と見なすとき，『F と微分同相な多様体の族 $\{E_p\}_{p\in B}$ であって和 $E = \coprod_{p\in B} E_p$ も多様体であるもの』を考えることに相当する．

多様体の間の C^∞ 写像 $\pi : E \to B$ に対し，B の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，および C^∞ 写像 $\varphi_\alpha^F : \pi^{-1}(U_\alpha) \to F$ があって，$\varphi_\alpha = (\pi, \varphi_\alpha^F) : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$ が微分同相であるとする．

このとき E を B 上の C^∞ **ファイバー束** といい，$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ をその **局所自明化** という．B の点 p の逆像 $E_p = \pi^{-1}(p)$ を p 上の **ファイバー** という．これは E の部分多様体であり，局所自明化が E_p から F への微分同相を誘導する．F のこともファイバーとよぶ．集合としては $E = \coprod_{p\in M} E_p$ である．B を底空間，E を全空間，$\pi : E \to B$ を射影という．

ファイバーが離散的であるファイバー束を **被覆空間** という．

C^∞ ファイバー束 $\pi : E \to B$ から $\pi' : E' \to B'$ への射とは，C^∞ 写像の組 $f : E \to E', \bar{f} : B \to B'$ であって $\pi' \circ f = \bar{f} \circ \pi$ をみたすものとする．この条件は，任意の $p \in B$ に対し $f(E_p) \subset E'_{\bar{f}(p)}$ となるということである．

上の定義で，多様体，C^∞ 写像，微分同相をそれぞれ位相空間，連続写像，同相におきかえれば，位相的ファイバー束の定義が得られる．C^∞ ファイバー束，位相的ファイバー束を単にファイバー束とよぶ．どちらの意味であるかは文脈から判断していただきたい．

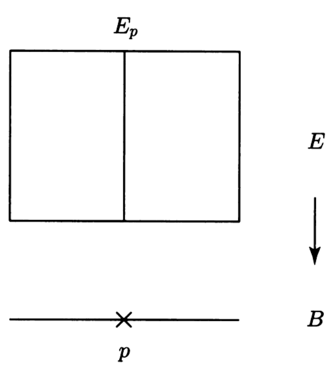


図 3.2

B 上のファイバー束 $\pi : E \to B$ と開集合 $U \subset B$ に対し，π の制限 $\pi^{-1}(U) \to U$ も自然なファイバー束の構造をもつ．これを E の U への制限といい，$E|U = \pi^{-1}(U)$ で表す．

B 上のファイバー束 $\pi_i : E_i \to B$ $(i = 1, 2)$ に対し，ファイバー積

$$E_1 \times_M E_2 = \{(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \mid \pi_1(x_1) = \pi_2(x_2)\} = \bigsqcup_{p \in M} (E_1)_p \times (E_2)_p$$

もまた自然な B 上のファイバー束の構造をもつ．

ファイバー束 $\pi : E \to B$ に対し，C^∞ 写像 $s : B \to E$ で $s(p) \in E_p$ $(p \in B)$ であるものを，E の **切断** という．像 $s(B) \subset E$ のことも切断とよぶ．

3.2 ベクトル束

3.2.1 ベクトル束と変換関数

$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする．ファイバー束であって各ファイバーが K ベクトル空間の構造をもつものを定義する．

r 次元 K ベクトル空間 V をファイバーとするファイバー束 $\pi : E \to B$ に対し，B の各点 p 上のファイバー E_p も r 次元 K ベクトル空間の構造をもち，局所自明化 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ が E_p から V への K ベクトル空間の同型を誘導するとき，E を B 上の階数 r の K **ベクトル束** という．$K = \mathbb{R}$ のとき実ベクトル束，$K = \mathbb{C}$ のとき複素ベクトル束という．階数 1 のベクトル束を **直線束** という．

局所自明化 $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times V$ から定まる写像

$$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathrm{GL}(V), \quad (p, g_{\alpha\beta}(p)u) = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(p, u) \quad (p \in U_{\alpha\beta},\ u \in V)$$

を，ベクトル束 E の **変換関数** という．これはコサイクル条件 $g_{\alpha\alpha} = \mathbf{1}$，$g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ をみたす．逆に，多様体 B の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と C^∞ 写像の族 $\{g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathrm{GL}(V)\}$ が与えられ，コサイクル条件をみたすとき，$\{g_{\alpha\beta}\}$ を変換関数とするベクトル束が構成できる．

3.2.2 カルテシアン射

ベクトル束 $\pi_E : E \to X$, $\pi_F : F \to Y$ に対し，C^∞ 写像 $\widetilde{\varphi} : E \to F$ が，**カルテシアン射** あるいは **束写像** であるとは，C^∞ 写像 $\varphi : X \to Y$ が存在して X の各点 p に対し $\widetilde{\varphi}$ が E_p から $F_{\varphi(p)}$ への線型同型を与えることである．φ は $\widetilde{\varphi}$ から一意的に決まる．X 上のベクトル束の間の同型とは，恒等写像上のカルテシアン射のことである．

多様体 X, Y と C^∞ 写像 $\varphi : X \to Y$，および Y 上のベクトル束 F に対し，ファイバー積 $\varphi^{-1}F = X \times_Y F$ に自然な X 上のベクトル束の構造が入

り，自然な写像 $\tilde{\varphi}: \varphi^{-1}F \to F$ が $\varphi: X \to Y$ 上のカルテシアン射になる．X 上のベクトル束 $\varphi^{-1}F$ を，φ による F の **ひきもどし** という．特に $X \to Y$ が部分多様体の包含写像であるとき，F のひきもどしを F の X への制限といい，$F|X$ と書く．

3.2.3　切断，芽と台

K ベクトル束 $\pi: E \to B$ の切断の全体 $\Gamma(B, E)$ は K ベクトル空間になる．そのゼロ元を **ゼロ切断** といい，その像をしばしば B と同一視する．

点 $p \in B$ を含む開集合 $U_1, U_2 \subset B$ 上の切断 $s_\alpha: U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ $(\alpha = 1, 2)$ に対し，関係 $s_1 \sim s_2$ を，p を含む開集合 $V \subset U_1 \cap U_2$ が存在して $s_1|V = s_2|V$ となることと定義すると，$\sim$ は同値関係になる．その同値類を，p における E の切断の **芽** という．

切断 $s: B \to E$ の定める $p \in B$ における芽を $s_{(p)}$ と書くとき，

$$\mathrm{supp}(s) = \{p \in B \mid s_{(p)} \neq 0\}$$

は B の閉集合である．これを切断 s の **台** という．$\{p \in B \mid s(p) \neq 0\}$ の閉包と定義してもいい．

3.2.4　ベクトル空間の世界とベクトル束の世界

ベクトル空間の部分ベクトル空間・商ベクトル空間の概念に対応して次が定義される．ベクトル束 $F \to B$ がベクトル束 $E \to B$ の **部分ベクトル束** であるとは，各点 $p \in B$ に対しファイバー F_p が E_p の部分ベクトル空間であるようなものである．このとき，$E/F = \coprod_{p \in B} E_p/F_p$ に B 上のベクトル束の構造が誘導される．これを **商ベクトル束** という．

ベクトル空間 V から W への線型写像全体の集合 $\mathrm{Hom}(V, W)$ はベクトル空間の構造をもつ．B 上のベクトル束 E, F に対し，各点 $p \in B$ 上のファイバーが $\mathrm{Hom}(E_p, F_p)$ であるような B 上のベクトル束 $\mathrm{Hom}(E, F)$ が自然に定義される．

ベクトル空間の双対，直和，テンソル積，対称積，外積の概念から，ベクトル束の双対，直和，テンソル積，対称積，外積も自然に定義される．

また，M 上のベクトル束 E と N 上のベクトル束 F に対し，$M \times N$ 上のベクトル束 $E \boxtimes F$ を，$(E \boxtimes F)_{(p,q)} = E_p \otimes F_q$ であるように定義することができる．これを **外部テンソル積** という．

3.2.5　圏とテンソル

ここでベクトル空間のテンソル積について復習しておこう．圏の用語を用いるが，それは結局はテンソル積の理解に必要になる．要は，『こういうはたらきをするベクトル空間がほしい』という注文書をきちんとした形式に則って書く

ということである．『祈ったことはすでに実現したかのように考えよ』というのにも似ている．

体 K 上のベクトル空間の圏を K-mod とする．K 上のベクトル空間 V_1, V_2 に対し，K-mod から集合の圏への共変関手 T_{V_1, V_2} を，K ベクトル空間 W に値をとる $V_1 \times V_2$ 上の双線型写像全体の集合を $T_{V_1, V_2}(W)$ とすることによって定義することができる．このとき，K ベクトル空間 $V_1 \otimes V_2$ が存在して，T_{V_1, V_2} は $\mathrm{Hom}(V_1 \otimes V_2, -)$ に自然同型である．

K 上のベクトル空間 V と非負整数 n に対し，K-mod から集合の圏への共変関手 $T_{V, n}$ を，K ベクトル空間 W に値をとる V 上の n 変数多重線型写像全体の集合を $T_{V, n}(W)$ とすることによって定義する．このとき，K ベクトル空間 $V^{\otimes n}$ が存在して，$T_{V, n}$ は $\mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, -)$ に自然同型である．なお，$V^{\otimes 0} = K$ である．$T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$ は K 代数になる．これを V 上の **テンソル代数** という．

また，K-mod から集合の圏への共変関手 $\Lambda_{V, n}$ を，K ベクトル空間 W に値をとる V 上の n 変数反対称多重線型写像全体の集合を $\Lambda_{V, n}(W)$ とすることによって定義する．このとき，K ベクトル空間 $\bigwedge^n V$ が存在して，$\Lambda_{V, n}$ は $\mathrm{Hom}(\bigwedge^n V, -)$ に自然同型である．なお，$\bigwedge^0 V = K$ である．$\bigwedge V = \bigoplus_{n \geq 0} \bigwedge^n V$ は K 代数になる．これを V 上の **外積代数** という．

3.2.6 射影空間とグラスマン多様体

体 K に対し，K^{n+1} の 1 次元部分空間全体の集合 $\mathrm{P}^n(K)$ を K 上の **射影空間** という．$x \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ に対し，x を含む 1 次元部分空間 $Kx \in \mathrm{P}^n(K)$ を対応させる．これにより，$\mathrm{P}^n(K)$ は，$K^{n+1} \setminus \{0\}$ への K の乗法群 $K^\times$ の作用

$$t \cdot (x_0, x_1, \ldots, x_n) = (tx_0, tx_1, \ldots, tx_n) \quad (t \in K^\times)$$

による商集合と同一視される．$j = 0, 1, \ldots, n$ に対し，

$$\widetilde{U}_j = \{x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in K^{n+1} \mid x_j \neq 0\},$$
$$U_j = \{Kx \in \mathrm{P}^n(K) \mid x \in \widetilde{U}_j\}$$

とおくと，$\mathrm{P}^n(K) = \bigcup_{j=0}^n U_j$ であり，また 1 対 1 対応

$$U_0 \to K^n, \quad Kx \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right),$$
$$U_1 \to K^n, \quad Kx \mapsto \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right), \quad \ldots,$$
$$U_n \to K^n, \quad Kx \mapsto \left(\frac{x_0}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

が定義される．

$\mathrm{P}^n(\mathbb{R})$ は n 次元多様体である．これを実射影空間という．$\mathrm{P}^n(\mathbb{C})$ は n 次元複素多様体である．これを複素射影空間という．

$K=\mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする．$Kx \in \mathrm{P}^n(K)$ 上のファイバーを $V=K^{n+1}$ の 1 次元部分空間 Kx とするような，$\mathrm{P}^n(K) \times K^{n+1}$ の部分ベクトル束を，射影空間上の **トートロジー直線束** という．その双対直線束 H を **超平面束** という．Kx は双対 V^* の超平面 $(Kx)^\perp$ を定め，これによる V^* の商が H を与える．

体 K に対し，K^{n+k} の k 次元部分空間全体の集合 $\mathrm{Gr}_{n,k}(K)$ を K 上の **グラスマン多様体** という．これは $K=\mathbb{R}$ のとき，nk 次元多様体であり，$K=\mathbb{C}$ のとき，nk 次元複素多様体である．

射影空間の場合と同様に，$\mathrm{Gr}_{n,k}(K) \times K^{n+k}$ の階数 k の自然な部分ベクトル束が定義される．これを，グラスマン多様体上の **トートロジー・ベクトル束** という．

3.3 管状近傍

3.3.1 接ベクトル空間

ユークリッド空間の部分多様体 M の場合，その接ベクトルは，M 上の曲線の接線上のベクトルとしてとらえられるが，このとき接ベクトル方向に関数を微分するという演算を考えることができ，むしろそちらを用いて接ベクトルの定義をする方がよい．

開区間 $I \subset \mathbb{R}$ から多様体 M への C^∞ 写像を M 上の道という．$\mathbb{R}^{n+k}$ の n 次元部分多様体 M 上の道 $\gamma(t) \in M, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ で $\gamma(0)=p$ となるものに対し，$\xi_p = \dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(0) \in \mathbb{R}^{n+k}$ と書けるようなベクトルを M の p における **接ベクトル** という．点 p を含む $\mathbb{R}^{n+k}$ の開集合 W 上の C^∞ 関数 f と $U=M \cap W$ 上の局所座標 $\varphi_U=(x^1, \ldots, x^n)$ に対し，

$$(\nabla f)(p) \cdot \xi_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t))\bigg|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (f \circ \varphi_U{}^{-1})}{\partial x^j}(\varphi_U(p)) \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}(0).$$

よって方向微分 $(\nabla f)(p) \cdot \xi_p$ は $f|M$ で決まる．また，関数 $f \in C^\infty(W)$ に対して点 p における接ベクトル ξ_p による微分を対応させる線型写像は，

$$f \mapsto \frac{\partial (f \circ \varphi_U{}^{-1})}{\partial x^j}(\varphi_U(p)) \quad (j=1, \ldots, n)$$

の 1 次結合である．そこで一般の多様体の接ベクトルを次のように定義する．

n 次元多様体 M の各点 p に対し，$p \in U$ となる局所座標 (U, φ_U), $\varphi_U = (x^1, \ldots, x^n)$ を取る．これに関する偏微分を

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : C^\infty(U) \to C^\infty(U), \quad \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial (f \circ \varphi_U^{-1})}{\partial x^j} \circ \varphi_U$$

と書く．p における C^∞ 関数の芽全体のなすベクトル空間を $C^\infty(M)_p$ とする

と，n 個の線型写像

$$(\partial_{U,j})_p : C^\infty(M)_p \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

は，$(\partial_{U,j})_p(x^k) = \delta_j^k$ より，1 次独立である．これらの 1 次結合を p における M の **接ベクトル** という．他の局所座標 $(V, \psi_V = (y^1, \ldots, y^n))$ に対し，

$$(\partial_{V,i})_p(f) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p) \cdot (\partial_{U,j})_p(f)$$

であることから，接ベクトルの概念が局所座標の取り方によらないことがわかる．

点 $p \in M$ における接ベクトル ξ_p は，

$$\xi_p(f_1 f_2) = \xi_p(f_1) \cdot f_2(p) + f_1(p) \cdot \xi_p(f_2) \quad (f_1, f_2 \in C^\infty(M)_p)$$

をみたす．逆にこの条件をみたす実線型写像 ξ_p は $(\partial_{U,j})_p$ $(j = 1, \ldots, n)$ の 1 次結合である．

接ベクトル全体のなすベクトル空間を **接ベクトル空間** といい，T_pM と書く．これは n 次元である．したがって，C^∞ 多様体の次元は微分同相に対して不変である．

3.3.2 横断性

多様体の間の C^∞ 写像 $\varphi : M \to N$ と点 $p \in M$ に対し，線型写像 $(\mathrm{d}\varphi)_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ を

$$((\mathrm{d}\varphi)_p(\xi_p))(f) = \xi_p(f \circ \varphi) \quad (\xi_p \in T_pM, \ f \in C^\infty(N)_{\varphi(p)})$$

により定める．これを写像 φ の p における **微分** という．各点における微分が単射であるような C^∞ 写像 φ を **はめこみ** といい，さらに φ も単射であるとき **埋めこみ** という．また，各点における微分が全射であるような C^∞ 写像を **沈めこみ** という．なお，複素多様体の接ベクトル空間は複素ベクトル空間の構造をもつ．

定義 3.3.1 多様体の間の C^∞ 写像 $\varphi : N \to M$ と部分多様体 $S \subset M$ が $p \in \varphi^{-1}(S)$ において **横断的** であるとは，$(\mathrm{d}\varphi)_p(T_pN) + T_{\varphi(p)}S = T_{\varphi(p)}M$ であることをいう．

C^∞ 写像 $\varphi : N \to M$ と余次元 k の部分多様体 S が $\varphi^{-1}(S)$ の各点で横断的であるとき，$\varphi^{-1}(S)$ は N の余次元 k の部分多様体になる．

C^∞ 写像 $\varphi : N \to M$ の方が部分多様体の包含写像であるとき，φ と $S \subset M$ が横断的であることを，N と S が横断的であるという．

3.3.3 接ベクトル束とベクトル場

多様体 M の各点における接ベクトル空間の和集合 $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$ は

M 上の自然な実ベクトル束の構造をもつ．これを M の **接ベクトル束** という．多様体の間の C^∞ 写像 $\varphi : M \to N$ に対し，C^∞ 写像

$$\mathrm{d}\varphi : TM \to TN, \quad \mathrm{d}\varphi | T_pM = (\mathrm{d}\varphi)_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$$

を φ の微分という．接ベクトル束の切断を **ベクトル場** という．ベクトル場 $\xi \in \Gamma(M, TM)$ は，各局所座標 (U, φ_U), $\varphi_U = (x^1, \ldots, x^n)$ に対し，

$$\xi | U = \sum_{j=1}^{n} \xi_U^j \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (\xi_U^1, \ldots, \xi_U^n \in C^\infty(U))$$

と書ける．点 $p \in M$ におけるベクトル場の芽 ξ は，実線型写像 $\xi : C^\infty(M)_p \to C^\infty(M)_p$ で

$$\xi(f_1 f_2) = \xi(f_1) \cdot f_2 + f_1 \cdot \xi(f_2) \quad (f_1, f_2 \in C^\infty(M)_p)$$

をみたすものと同一視される．ベクトル場 ξ は，実線型写像 $\xi : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ を与える．

M 上のベクトル場 ξ, η に対し，

$$\xi(\eta(f_1 f_2)) = \xi(\eta(f_1)) \cdot f_2 + \eta(f_1) \cdot \xi(f_2) + \xi(f_1) \cdot \eta(f_2) + f_1 \cdot \xi(\eta(f_2))$$

より，$[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ も M 上のベクトル場になる．これを ξ, η のリー括弧積という．この演算は $\mathbb{R}$ 上双線型であって，

$$[\xi, \xi] = 0, \quad [\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0$$

をみたす．

3.3.4 管状近傍

多様体 M とその部分多様体 S に対し，商ベクトル空間 $T_{M,p}S = T_pM/T_pS$ を $p \in S$ における **法ベクトル空間** といい，商ベクトル束 $T_MS = (TM|S)/TS = \coprod_{p \in S} T_{M,p}S$ は S 上の自然な実ベクトル束の構造をもつ．これを $S \subset M$ の **法ベクトル束** という．

部分多様体の管状近傍とは，部分多様体の近傍をベクトル束のゼロ切断の近傍と同一視したものである．

すなわち多様体 M の部分多様体 S に対し，S の開近傍 $\nu_M(S) \subset M$ から法ベクトル束 $E = T_MS$ のゼロ切断の星型開近傍 $\nu_E(S) \subset E$ の上への微分同相 $\tau : \nu_M(S) \to \nu_E(S)$ で，ゼロ切断 $0 : S \to E$ の拡張になっているものを考える．ここで星型とは，$\nu_E(S)$ の各ファイバーの点がその中で原点と線分で結べることである．このとき，$(\nu_M(S), \tau)$ を $S \subset M$ の **管状近傍** という．微分同相 τ によって，管状近傍には S 上のファイバー束の構造が入る．

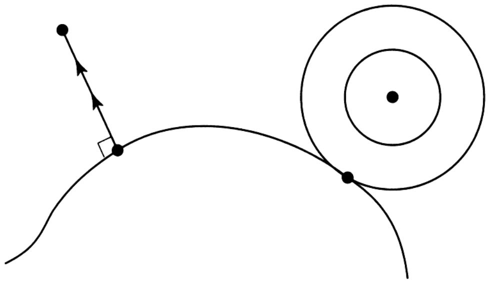


図 3.3

3.3.5 管状近傍の粒子描像と波動描像

写像 $\tau^{-1} : \nu_E(S) \to \nu_M(S)$ を粒子描像で，$\tau : \nu_M(S) \to \nu_E(S)$ を波動描像で説明する．簡単のため，M がユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ で S がコンパクトである場合を考える．

この場合，S の管状近傍を S の ε 近傍

$$\nu(S, \varepsilon) = \{\boldsymbol{x} \in M \mid d(\boldsymbol{x}, S) < \varepsilon\} \quad (d(\boldsymbol{x}, S) = \inf\{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \mid \boldsymbol{y} \in S\})$$

とする．ここで，$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2}$，$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$．ベクトル束の射影に相当するのは，$\boldsymbol{x} \in \nu(S, \varepsilon)$ から S に「最短の垂線を下ろす」ことである．最短垂線が一意的になるように $\varepsilon > 0$ を十分小さく取っておく．

粒子描像では，垂線を下ろすというのは逆問題である．時刻 $t = 0$ に S の点 p から，p における S の法ベクトル $\xi \in E_p = T_p^{\perp} S$ を初速として発射された，$M = \mathbb{R}^n$ の中を等速直線運動する粒子が，時刻 $t = 1$ に位置 $q = \tau^{-1}(p, \xi)$ まで動くとする．初速 ξ の大きさが十分小さい範囲 $\nu_E(S)$ に限定すれば，写像 τ^{-1} は単射になる．このとき，τ^{-1} の像の各点に対し，S に下ろす最短垂線が一意的に存在する．

波動描像では，$M = \mathbb{R}^n$ の点 q から放射された球面波が最初に S に到達する点 p が最短垂線の足である．q が S に十分近ければ p は一意的である．

3.4 微分形式

3.4.1 多様体上の微分形式

ベクトル束 $E \to M$ の各ファイバーの双対を束ねたもの $E^* = \bigsqcup_{p \in M} E_p^*$ や各ファイバーの外積を束ねたもの $\bigwedge^k E = \bigsqcup_{p \in M} \bigwedge^k E_p$ にも自然なベクトル束の構造が入る．

多様体 M の接ベクトル束 TM の双対 $T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M$ を **余接ベクトル束** といい，その k 次外積 $\bigwedge^k T^*M = \bigsqcup_{p \in M} \bigwedge^k T_p^*M$ の切断を **k 次微分形式** という．$\Omega^k(M) = \Gamma(M, \bigwedge^k T^*M)$ と書く．また，M 上のベクトル束 $E \to M$ に対し，$\Omega^k(M, E) = \Gamma(M, E \otimes_{\mathbb{R}} \bigwedge^k T^*M)$ と書く．

$\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ である．$\Omega^*(M) = \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k(M)$ は可換環 $C^\infty(M)$ 上の代数である．$\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^\ell(M)$ に対し，$\beta \wedge \alpha = (-1)^{k\ell}\alpha \wedge \beta$ がなりたつ（この条件を次数つき可換性という）．スカラー倍 $(-1) : T_pM \to T_pM$ の誘導する写像を $(-1)^* : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ と書く．$\alpha \in \Omega^k(M)$ に対し，$(-1)^*\alpha = (-1)^k\alpha$ である．

3.4.2 内部積・外微分作用素・リー微分

ベクトル場 ξ に対し，作用素 $\iota_\xi = \iota(\xi) : \Omega^1(M) \to \Omega^0(M)$, $\iota_\xi\alpha = \alpha(\xi)$ は

$$\iota_\xi(\alpha \wedge \beta) = \iota_\xi\alpha \wedge \beta + ((-1)^*\alpha) \wedge \iota_\xi\beta$$

がなりたつように，$\iota_\xi : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ に一意的に拡張される．ι_ξ を **内部積** という．これは $\Omega^k(M, E)$ 上にも定義できる．

M の局所座標 (U, φ_U), $\varphi_U = (x^1, \ldots, x^n)$ と点 $p \in U$ に対し，$(\mathrm{d}x^j)_p \in T_p^*M$ $(j = 1, \ldots, n)$ を $(\partial_{U,j})_p \in T_pM$ $(j = 1, \ldots, n)$ の双対基底とする．微分作用素

$$\mathrm{d} : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M), \quad \mathrm{d}f = \sum_{j=1}^{n} (\partial_{U,j} f)\, \mathrm{d}x^j$$

は局所座標に依存しない．さらに，

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + ((-1)^*\alpha) \wedge \mathrm{d}\beta, \quad \mathrm{dd} = 0$$

がなりたつように，$\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ に一意的に拡張される．d を **外微分作用素** という．

微分作用素

$$L_\xi = (\mathrm{d} + \iota_\xi)^2 = \mathrm{d}\iota_\xi + \iota_\xi\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$$

を **リー微分** という．

$$[L_\xi, \mathrm{d}] = 0, \quad [L_\xi, \iota_\eta] = \iota_{[\xi, \eta]}, \quad [L_\xi, L_\eta] = L_{[\xi, \eta]}$$

がなりたつ．

k 次微分形式 $\theta \in \Omega^k(M)$ とベクトル場 $\xi_1, \ldots, \xi_k$ に対し，

$$\theta(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \iota_{\xi_k} \cdots \iota_{\xi_1}\theta \in C^\infty(M)$$

とおく．1 次微分形式 $\theta \in \Omega^1(M)$ とベクトル場 ξ, η に対し，

$$\mathrm{d}\theta(\xi, \eta) = \iota_\eta\iota_\xi\mathrm{d}\theta = \iota_\eta L_\xi\theta - \iota_\eta\mathrm{d}\iota_\xi\theta = \xi(\theta(\eta)) - \eta(\theta(\xi)) - \theta([\xi, \eta]). \quad (3.1)$$

3.4.3 微分形式のひきもどし

C^∞ 写像 $\varphi : M \to N$ の誘導する写像 $\varphi^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ は，

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta, \quad \varphi^* \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ \varphi^*$$

がなりたつように，写像 $\varphi^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ に一意的に拡張される．$\varphi^*\alpha \in \Omega^k(M)$ を φ による $\alpha \in \Omega^k(N)$ の **ひきもどし** という．

多様体 M の部分多様体 S に対し，包含写像 $i : S \to M$ による微分形式 $\alpha \in \Omega^k(M)$ のひきもどし $i^*\alpha \in \Omega^k(S)$ を，α の S への制限という．これを $\alpha|S$，あるいは単に α と書くこともある．

3.4.4 複体とコホモロジー

はじめに『トポロジーは数えるのだ』と言った．しかし物をもれなく・重複なく数えるのは大変なことである．そこで最初はとりあえずもれなく数えることに専念して，重複を後で数えて修正することにする．重複を数えるときにも，まずもれなく数えて，後で重複の重複を数えて修正する．さらに重複の重複を数えるときにも，と同様に続けてゆく．

一方，物の個数を数えるときには，どういう順番に数えても結果は変わらないという自由があった．ベクトル空間の次元を数えるときは，さらにどの基底を数えても結果は変わらないというより大きい自由があることをわれわれは知っている．そこで，ベクトル空間に対しても，まずもれなく数え，後で重複を数えて修正することにして，重複を数えるときにも…，という作業に相当することを実行することにする．

これがホモロジー代数の考え方である．ここではベクトル空間より広いアーベル群の概念に基づいてそのさわりを紹介する．（グロタンディークは，さらに広いアーベル圏の概念に基づいてホモロジー代数の基礎を確立した.）

アーベル群の **複体** $(C^\bullet, d)$ とは，アーベル群の列 $\{C^n\}_{n\geq 0}$ と準同型の列 $\{d^n : C^n \to C^{n+1}\}_{n\geq 0}$ で $d^{n+1}d^n = 0$ をみたすものである．C^n の元を n 次 **コチェイン**，$d = d^n$ を **境界作用素** あるいは **微分** という．

複体 $(C^\bullet, d)$ から $(C'^\bullet, d')$ への **射** とは，準同型の列 $\varphi^\bullet = \{\varphi^n : C^n \to C'^n\}_{n\geq 0}$ で $d'^n\varphi^n = \varphi^{n+1}d^n$ をみたすものである．

C^n の部分群

$$Z^n(C^\bullet) = \{x \in C^n \mid dx = 0\}, \quad B^n(C^\bullet) = \{dx \mid x \in C^{n-1}\} \quad (B^0 = 0)$$

の元を，それぞれ n 次 **コサイクル**，n 次 **コバウンダリー** という．$dd = 0$ より，$Z^n(C^\bullet) \supset B^n(C^\bullet)$ である．剰余群 $H^n(C^\bullet) = Z^n(C^\bullet)/B^n(C^\bullet)$ を n 次 **コホモロジー群**，その元を n 次 **コホモロジー類** という．

複体の射は，コサイクルの群の間の準同型，コバウンダリーの群の間の準同型，コホモロジー群の間の準同型を誘導する．

複体の射 $\varphi_0^\bullet, \varphi_1^\bullet : (C^\bullet, d) \to (C'^\bullet, d')$ の間の **ホモトピー** $h = (h^p)$ とは，準同型 $h^p : C^p \to C'^{p-1}$ の列であって，$\varphi_1^p - \varphi_0^p = d'h^p + h^{p+1}d$ をみたすも

ののことである．ホモトピーの存在は同値関係になる．ホモトピーが存在するとき，$\varphi_0^\bullet, \varphi_1^\bullet$ の誘導するコホモロジー群の間の準同型は一致する．

境界作用素が次数を下げるものを考えることもあり，その場合添え字を下に書くのがならわしである．すなわち，アーベル群の列 $C_\bullet = \{C_n\}$ と準同型の列 $\{\partial^n : C_{n+1} \to C_n\}$ の組で $\partial^n \partial^{n+1} = 0$ をみたすものも複体という．C_n の元を n 次 **チェイン** という．

$$Z_n(C_\bullet) = \{x \in C_n \mid \partial x = 0\}, \quad B_n(C_\bullet) = \{\partial x \mid x \in C_{n+1}\}$$

の元を，それぞれ n 次 **サイクル**, n 次 **バウンダリー** という．剰余群 $H_n(C_\bullet) = Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$ を n 次 **ホモロジー群**，その元を n 次 **ホモロジー類** という．

ここでアーベル群に対して定義した諸概念は，可換環 A 上の加群に対しても同様に定義される．

複体の線型代数をホモロジー代数とよぶ．

3.4.5 ホモトピーと亜群

複体の射のホモトピーの概念は，連続写像のホモトピーに由来するものである．I を有界閉区間，たとえば $[0, 1]$ とする．位相空間 X から Y への連続写像 f, g が **ホモトピック** であるとは，連続写像 $H : X \times I \to Y$ が存在して，

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x) \quad (x \in X)$$

となることである．H を f, g の間の **ホモトピー** という．

区間 I を $I_0 = [0, 1/2]$ と $I_1 = [1/2, 1]$ に分割すると，f から g へのホモトピーを，f から $H(x, 1/2)$ からのホモトピーと $H(x, 1/2)$ から g へのホモトピーの合成と見なすことができる．熱核の構成のときに幾何単体というものが出てきたが，これも区間の分割に関連する概念であった．ホモトピーの合成によってホモトピックが同値関係であることがわかる．同値類を **ホモトピー類** という．写像 $i_0, i_1 : X \to X \times I$ を，$i_0(x) = (x, 0), i_1(x) = (x, 1)$ で定めると，上の条件は $H \circ i_0 = f, H \circ i_1 = g$ と書ける．

ホモトピーもまた連続写像であるから，2 つのホモトピーの間のホモトピーを考えることができる．f から g へのホモトピーのホモトピー類は，合成を演算とする **亜群** になる．

定義 3.4.1 集合 I と集合族 $\{X_{ij}\}_{i,\,j \in I}$ と写像の族 $\{M_{ijk} : X_{ij} \times X_{jk} \to X_{ik}\}_{i,\,j,\,k \in I}$ と元の族 $\{e_i \in X_{ii}\}_{i \in I}$ と写像の族 $\{R_{ij} : X_{ij} \to X_{ji}\}_{i,\,j \in I}$ が，
(1) $M(x, M(y, z)) = M(M(x, y), z)$ $(x \in X_{ij}, y \in X_{ik}, z \in X_{kl})$
(2) $x = M(x, e), y = M(e, y)$
(3) $M(x, R(x)) = e, M(R(y), y) = e$
をみたすとき，この一式のデータを **亜群** という．

連続写像の集合に対し，写像のホモトピー類，ホモトピーのホモトピー類，ホモトピーのホモトピーのホモトピー類，のような亜群の系列が考えられる．これはいわば，写像の空間を漸近展開しているのである．

亜群の公理から R_{ij} に関する部分を削除したのが **圏** である．また，I が 1 点だけからなる集合であるとき，亜群は群と同じことである．

3.4.6 ドラーム・コホモロジー

微分形式の全体にも複体の構造が入る．

多様体 M に対し，実ベクトル空間の複体 $(\Omega^\bullet(M), \mathrm{d})$ を **ドラーム複体** といい，

$$\mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(M) = \frac{\mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}:\Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M))}{\mathrm{Im}\,(\mathrm{d}:\Omega^{k-1}(M)\to\Omega^k(M))}$$

を M の k 次 **ドラーム・コホモロジー** という．$k=0$ のときは分母を 0 とする．微分形式の外積は $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(M) = \bigoplus_{k\geq 0}\mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(M)$ に次数つき可換 $\mathbb{R}$ 代数の構造を誘導する．

C^∞ 写像 $\varphi: M\to N$ は次数つき $\mathbb{R}$ 代数の準同型 $\varphi^*: \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(N)\to\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(M)$ を誘導する．

射影 $j: M\times\mathbb{R}\to M$ は同型 $j^*: \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(M)\to\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(M\times\mathbb{R})$ を誘導する．したがって次が成立する．

定理 3.4.1（ポアンカレの補題）$\mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^n) = \begin{cases}\mathbb{R} & k=0\\ 0 & k\geq 1\end{cases}$

3.5 多様体上の積分とトム形式

3.5.1 1 の分割

定義 3.5.1 (i) 位相空間 X の部分集合の族 $\{A_i\}_{i\in I}$ が **局所有限** であるとは，任意の点 $x\in X$ に対し x の開近傍 V が存在して，$V\cap A_i\neq\varnothing$ となる i が有限個であること．

(ii) 位相空間 X 上の実数値連続関数の族 $\{\rho_i\}_{i\in I}$ が **1 の分割** であるとは，$\{\mathrm{supp}(\rho_i)\}_{i\in I}$ が局所有限であって $\sum_{i\in I}\rho_i = 1$，$\rho_i\geq 0$ であること．

(iii) 位相空間 X 上の 1 の分割 $\{\rho_i\}_{i\in I}$ が開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ に **従属する** とは，任意の $i\in I$ に対し $\mathrm{supp}(\rho_i)\subset U_i$ であること．

(iv) 位相空間 X の開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$，$\{V_j\}_{j\in J}$ に対し，$\{V_j\}_{j\in J}$ が $\{U_i\}_{i\in I}$ の **細分** であるとは，任意の $j\in J$ に対し $i\in I$ が存在して $V_j\subset U_i$ となること．

(v) 位相空間 X が **パラコンパクト** であるとは，X の任意の開被覆が局所有限な細分をもつこと．

次が成立する．

定理 3.5.1 パラコンパクト多様体の任意の開被覆に対し，それに従属する，C^∞ 関数からなる 1 の分割が存在する．

1 の分割を構成するための素材として次のような関数が用いられる．まず $\rho_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ を

$$\rho_0(x) = \mathrm{e}^{-1/x}\ (x > 0), \quad \rho_0(x) = 0\ (x \leq 0)$$

により定義する．そして $\varepsilon > 0$ に対し，

$$\theta_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = C_\varepsilon \rho_0(\varepsilon^2 - |\boldsymbol{x}|^2), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \theta_\varepsilon(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1 \tag{3.2}$$

とおく．θ_ε の台は原点を中心とする半径 ε の閉球である．

以下，多様体はパラコンパクトであるとし，1 の分割は C^∞ 関数からなるとする．

3.5.2 密度束

多様体 M に対し，M 上の実直線束 $|\Lambda|$ であって，次の条件をみたすものが存在する．

1. 任意の局所座標 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ に対し，U 上の切断 $|\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n|$ で，どの点でも 0 にならないものが対応する．
2. U 上の座標 $(x^1, \ldots, x^n)$，$(y^1, \ldots, y^n)$ に対し，ヤコビ行列を $J = (\partial y^i/\partial x^j)$ とすると，$|\mathrm{d}y^1 \cdots \mathrm{d}y^n| = |\det J| \cdot |\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n|$.

これを **密度束** といい，その切断を **密度** という．密度束は自明な実直線束である．密度 μ で，局所座標 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ に対し，

$$\mu|U = \mu_U \cdot |\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n|, \quad \mu_U > 0$$

と書けるものを M の **体積要素** という．

3.5.3 密度と積分

多様体 M 上の密度 σ に対しその積分 $\int_M \sigma$ が定義される．すなわち，M 上の局所有限な局所座標系 $\{(U_\alpha; x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)\}_{\alpha \in I}$ とこれに従属する 1 の分割 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in I}$ に対し，$\sigma|U_\alpha = \sigma_\alpha |\mathrm{d}x_\alpha^1 \cdots \mathrm{d}x_\alpha^n|$ とおくと，

$$\int_M \sigma = \sum_{\alpha \in I} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \sigma_\alpha \,\mathrm{d}x_\alpha^1 \cdots \mathrm{d}x_\alpha^n.$$

積分の変数変換の公式より，右辺は局所座標系と 1 の分割の取り方によらない．σ がコンパクト台ならば積分は収束する．

密度 σ が体積要素 μ と関数 f の積であるとき，$\int_M \sigma = \int_M f\,\mathrm{d}\mu$ と書く．

3.5.4 コンパクト台の微分形式

コンパクトな台をもつ M 上の k 次微分形式全体のなす $\Omega^k(M)$ の部分ベクトル空間を $\Omega^k_{\mathrm{c}}(M)$ と書く．$\mathrm{d}\Omega^k_{\mathrm{c}}(M) \subset \Omega^{k+1}_{\mathrm{c}}(M)$ に注意する．複体 $(\Omega^{\bullet}_{\mathrm{c}}, \mathrm{d})$ のコホモロジー

$$\mathrm{H}^k_{\mathrm{c}}(M) = \frac{\mathrm{Ker}\,(\mathrm{d} : \Omega^k_{\mathrm{c}}(M) \to \Omega^{k+1}_{\mathrm{c}}(M))}{\mathrm{Im}\,(\mathrm{d} : \Omega^{k-1}_{\mathrm{c}}(M) \to \Omega^k_{\mathrm{c}}(M))}$$

を M の k 次 **コンパクト台ドラーム・コホモロジー** という．

このとき次が成立する．

ポアンカレの補題（コンパクト台）

$$\mathrm{H}^k_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

3.5.5 向きと積分

回転対称性は，数学において最も基本的な対称性だが，実は目に見ることができない．たとえば円は回転対称であるだけでなく，中心を通る直線に関して線対称でもある．純粋な回転対称性を思い浮かべるには，円に向きを入れて考えればよい．よく円の上の矢印を描いてこれを表現するが，矢印は図形ではなく記号なのであって，図形としては回転対称性をも破っている．ところが回転対称性を離散的に有限巡回群で近似するとき，卍のような図形によって純粋な有限巡回群対称性を実現することができるようになる．卍という字が尊ばれるのは，それが目には見えない純粋な回転対称性を善男善女に教える方便だからなのであろう．

線の向きは矢印という記号によって表現すればよいが，面の向き，立体の向きとなると案外言い方が難しい．

n 次元実ベクトル空間 V の 2 つの基底 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ と $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が同じ向きをもつとは，$\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\boldsymbol{u}_j$ と書くとき，$\det(a_{ij}) > 0$ となることである．これは同値関係である．同値類 $[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n]$ を V の **向き** という．V の向きは $\det V = \bigwedge^n V$ から $\mathbb{R}$ への同型から誘導される．

実ベクトル束 $E \to M$ の向き $o_E = \{o_{E,p}\}_{p \in M}$ とは，各ファイバー E_p の向きの族であって，各点 $p \in M$ に対し，p の開近傍 U と切断 $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(U, E)$ が存在して，各 $p \in U$ において $s_1(p), \ldots, s_n(p)$ が $o_{E,p}$ と同じ向きを与える基底になるようなものである．向きが存在する実ベクトル束を **向きづけ可能な** ベクトル束といい，向きが指定された実ベクトル束を **有向ベクトル束** という．有向ベクトル束の間のカルテシアン射は，向きを保つもののみをそうよぶことにする．

多様体の向きとは，その接ベクトル束の向きのことである．多様体 M の局所座標 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ に対し，$\partial_j = \partial/\partial x_j$ とおくと，$p \in U$ に対し，

$[\partial_1, \dots, \partial_n]$ が接ベクトル空間 T_pU の向きを与える．多様体が向きづけ可能とは，接ベクトル束が向きづけ可能であることであり，**有向多様体** とは，接ベクトル束の向きが指定されている多様体のことである．

有向 n 次元多様体 M 上の n 次微分形式 ω に対し，密度 $\rho(\omega)$ が自然に定まる．すなわち，局所座標 $(U; x^1, \dots, x^n)$ で，$[\partial_1, \dots, \partial_n]$ が M の向きに一致するものに対し，$\omega|U = \omega_U \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$ $(\omega_U \in C^\infty(U))$ ならば，$\rho(\omega) = \omega_U \cdot |\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n|$ であるように定める．$\omega_U \neq 0$ であるとき，すなわち $\rho(\omega)$ が体積要素であるとき，ω のことを **体積形式** とよぶ．

有向 n 次元多様体 M とその上の n 次微分形式 ω に対し，積分を $\int_M \omega = \int_M \rho(\omega)$ で定義する．左辺の M は向きのデータを含む．

3.5.6 トム形式・ポアンカレ双対・オイラー類

座標空間 $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ に対し，$\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ と書き，多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ に対し，$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ とおく．

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ であって，任意の非負整数 m と多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ に対し，$|\boldsymbol{x}|^m \partial^\alpha f(\boldsymbol{x})$ が有界であるものを **急減少関数** という．

階数 n の有向ベクトル束 $\pi : E \to M$ において，n 次閉微分形式 $\theta_E \in \Omega^n(E)$ であって，E の各ファイバー上で急減少かつ積分が 1 であるようなものを E の **トム形式** という．任意のコンパクト集合 $K \subset M$ に対して $E|K$ 上コンパクト台をもつようなトム形式がつねに存在する．

多様体 M 上の自明束 $E_0 = M \times \mathbb{R}^k \to M$ に対し，$\boldsymbol{u} = (u^1, \dots, u^k)$ を $\mathbb{R}^k$ の座標とすると，トム形式として

$$\theta_{E_0} = (2\pi)^{-k/2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}\, \mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^k \in \Omega^k(E_0)$$

を取ることができる．有向ベクトル束 E が自明束 E_0 の商ベクトル束である場合，$E_0 \to M$ のトム形式 θ_{E_0} をベクトル束 $E_0 \to E$ のファイバー方向について積分することによって E のトム形式が得られる．

トム形式が閉であることを確率の保存に見立てると，トム形式は管状近傍の確率描像と見なすことができる．

多様体 M のコンパクト部分多様体 S の管状近傍 $\tau : \nu_M(S) \to \nu_E(S)$ とトム形式 $\theta_E \in \Omega^n_c(\nu_E(S))$ に対し，$\tau^*\theta_E$ を M 上に，$\nu_M(S)$ の外では 0 であるように拡張する．これを S の **ポアンカレ双対** という．

階数 n の有向実ベクトル束 $\pi : E \to S$ に対し，その切断 $s : S \to E$ によるトム形式 θ_E の引きもどしのド・ラーム・コホモロジー類 $[s^*\theta_E] \in \mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(S)$ を E の **オイラー類** という．

第 4 章
アフィン接続とリーマン多様体

子どもたちが幾何学を学ぶとき，三角形の合同条件を使っていろいろな定理を証明することに親しむ．微分積分を頼りに幾何学の対象をたとえば一般の曲面にまで広げようとするときも，最初の問いは，その合同条件をどう記述するのかである．このとき曲面の管状近傍に注目すると，第 1・第 2 基本形式，レビチビタ接続，リーマン曲率という微分幾何の基本概念が自然に現れる．そして第 1 基本形式がレビチビタ接続を，レビチビタ接続がリーマン曲率を決定していることの意味をよくよく吟味する中で，『n 方向に広がったもの』と『点ごとに与えられた二次形式』という設定こそが，太平の眠りを覚ます幾何学の夜明けたるべし，というビジョンが生まれる．

若きリーマンが講演『幾何学の基礎をなす仮説において』においてこのビジョンを世に問うたのが 1854 年，ペリー率いる黒船が浦賀に姿を現した翌年のことである．欧州の精神文明・物質文明がリーマンのような青年を生み出す段階に達していた以上，もはや攘夷などありえない選択肢であることは火を見るより明らかであった．

「いいかい，地球ってえのは丸いんだ．お天道様から見て丸いってえ話じゃあない．その上で暮らしてる俺たちにとって丸いって言ってるんでい！」

しかしそんなことを言ったところで誰もわかろうとはしないだろう，そのときまで勝はそう思っていた．

「勝先生がそうおっしゃるなら」

西郷が静かに言った．勝は心を決めた．

4.1 超曲面の幾何

4.1.1 ユークリッド空間上の等長変換

ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ 上の内積とノルムを $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_{j=1}^n x_j y_j$, $|\boldsymbol{x}|=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$ とし，距離 d を $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ によって定義すると，$(\mathbb{R}^n, d)$ は距離空間に

なる．これを **ユークリッド空間** という．ユークリッド空間の距離空間としての構造はアフィン空間としての構造を決める．すなわち，

定理 4.1.1 任意の等長写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ は，n 次直交行列 P と n 次列ベクトル $\boldsymbol{q}$ により，$f(\boldsymbol{x})=P\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}$ と書ける．ただし $\boldsymbol{x}$ は n 次列ベクトル．

証明 $g(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{0})$ とおくと，$g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ も等長的で $g(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\dfrac{1}{2}\left(|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2\right)$ より，より，$g(\boldsymbol{x})\cdot g(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$. すなわち g は内積を保つ．よって，第 j 成分が 1 で他の成分が 0 である n 次列ベクトルを $\mathbf{e}_j$ とすると，$g(\mathbf{e}_i)\cdot g(\mathbf{e}_j)=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij}$. よって $g(\mathbf{e}_j)$ $(j=1,\dots,n)$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底．よって $g(\boldsymbol{x})\cdot g(\mathbf{e}_j)=\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{e}_j$ より，g は線型．よって n 次直交行列 $P=[g(\mathbf{e}_1)\ \cdots\ g(\mathbf{e}_n)]$ により，$g(\boldsymbol{x})=P\boldsymbol{x}$ と書ける． □

この定理の無限小版について述べる．$x_1\cdots x_n$ 空間上にリーマン計量

$$g_{\mathrm{euc}}=\sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i\cdot\mathrm{d}x_i$$

を与える．これをユークリッド計量という．

定理 4.1.2 $x_1\cdots x_n$ 空間の連結開集合 U 上の座標系 $(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n)$ に対し，

$$\sum_{i=1}^n \mathrm{d}\hat{x}_i\cdot\mathrm{d}\hat{x}_i=\sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i\cdot\mathrm{d}x_i$$

であるとき，直交行列 P と $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ が存在して，

$$\hat{\boldsymbol{x}}=P\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\quad(\boldsymbol{x}=(x_1\ \cdots\ x_n)^{\mathrm{T}},\ \hat{\boldsymbol{x}}=(\hat{x}_1\ \cdots\ \hat{x}_n)^{\mathrm{T}}).$$

証明 条件より，

$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial x_k}\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial x_l}=\delta_{kl}=\begin{cases}1 & k=l\\ 0 & k\neq l\end{cases}.$$

よって

$$0=\frac{\partial}{\partial x_m}\sum_{i=1}^n\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial x_k}\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial x_l}=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial^2\hat{x}_i}{\partial x_m\partial x_k}\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial x_l}+\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial x_k}\frac{\partial^2\hat{x}_i}{\partial x_m\partial x_l}\right).$$

これに，m,k,l を k,l,m におきかえた式を加え，l,m,k におきかえた式を引くと（この操作は後でくりかえし現れる），

$$2\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2\hat{x}_i}{\partial x_m\partial x_k}\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial x_l}=0,\qquad\frac{\partial^2\hat{x}_i}{\partial x_m\partial x_k}=0.$$

U が連結なので，n 次正方行列 P と $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ により，$\hat{\boldsymbol{x}}=P\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$ と書ける．条件式に代入すると，P が直交行列であることがわかる． □

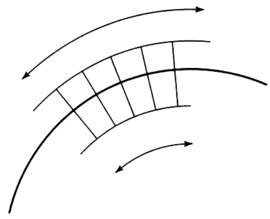


図 4.1

4.1.2　超曲面の管状近傍

3 次元ユークリッド空間の中の曲線・曲面の形の定量的記述は管状近傍の考察によってなされる．すなわち，曲線を太らせると曲がった部分の内側が縮み，外側が伸びるので，その伸び縮みを測れば曲線の曲がり具合が記述できる．また，曲面に厚みをつけ，曲面の両側の伸び縮みを測れば曲面の曲がり具合が記述できる．

$n+1$ 次元ユークリッド空間の中の超曲面の管状近傍の構造を観察する．

超曲面 $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を $u_1 \cdots u_n$ 空間の開集合 U の C^∞ 埋めこみ $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ の像とする．$M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ のノルム 1 の法ベクトル場 ν を固定する．C^∞ 写像 $\hat{\varphi} : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ を

$$\hat{\varphi}(q, u) = \varphi(q) + u\,\nu_{\varphi(q)}$$

によって定義する．これが埋めこみになるように $\varepsilon > 0$ が取れるとする．このとき $\hat{\varphi}$ の像は $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ の管状近傍になる．

$\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial u_i}$ と略記する．$\langle \nu_{\varphi(q)}, \nu_{\varphi(q)} \rangle = 1$ を微分して，$\partial_i \nu \in T_pM$ を得る．線型写像の族

$$W = \{W_p : T_pM \to T_pM\}_{p \in M}, \quad W(\partial_i \varphi) = -\partial_i \nu$$

を **形作用素** という．$\langle \partial_i \varphi, \partial_j \nu \rangle = -\langle \partial_j \partial_i \varphi, \nu \rangle$ は i, j について対称なので，$\langle \xi_1, W_p(\xi_2) \rangle$ は $\xi_1, \xi_2 \in T_pM$ について対称である．

$$\mathrm{d}\hat{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i \varphi - u\,W(\partial_i \varphi))\,\mathrm{d}u_i + \nu\,\mathrm{d}u$$

より，管状近傍上の座標系 $(u_1, \ldots, u_n, u)$ に関し，

$$g_{\mathrm{euc}} = \sum_{i,j=1}^{n} (g_{ij} - 2u\,W_{ij} + u^2 m_{ij})\mathrm{d}u_i \cdot \mathrm{d}u_j + \mathrm{d}u \cdot \mathrm{d}u.$$

ここで，

$$g_{ij} = \langle \partial_i \varphi, \partial_j \varphi \rangle, \quad W_{ij} = \langle \partial_i \varphi, W(\partial_j \varphi) \rangle, \quad m_{ij} = \langle W(\partial_i \varphi), W(\partial_j \varphi) \rangle$$

であり，これらは i, j について対称である．$\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\mathrm{d}u_i \cdot \mathrm{d}u_j$, $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} W_{ij}\mathrm{d}u_i \cdot \mathrm{d}u_j$

をそれぞれ，**第 1 基本形式**，**第 2 基本形式** という．

超曲面 M 上の曲線 C を $(u_1(t), \ldots, u_n(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ によって与えると，C の長さは

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \partial_i\varphi \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}, \sum_{j=1}^{n} \partial_j\varphi \frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t} \right\rangle^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i,\,j=1}^{n} g_{ij} \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t} \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t$$

であって，第 1 基本形式で書ける．第 1 基本形式は U 上のリーマン計量を与える．

管状近傍の計量 g_{euc} は形作用素と第 1 基本形式から決まる．したがって，定理 4.1.2 より，形作用素と第 1 基本形式のそれぞれが一致するパラメータつき曲面どうしは合同である．

4.1.3 Theorema egregium

ガウスは形作用素と第 1 基本形式の間に成立する関係式を発見し，それを theorema egregium（驚くべき定理）とよんだ．

$T_p\mathbb{R}^{n+1}$ における T_pM の直交補空間を $T_p^{\perp}M$ と書く．

直交射影 $\pi_{\top} : T_p\mathbb{R}^{n+1} \to T_pM$, $\pi_{\perp} : T_p\mathbb{R}^{n+1} \to T_p^{\perp}M$ に対し，

$$\nabla_i = \pi_{\top}\partial_i, \quad \nabla_i(\partial_j\varphi) = \Gamma_{ij}^{k}\,\partial_k\varphi$$

とおく．ここで，項の中に 2 度出てくる添え字 k については和を取っている（アインシュタインの規約）．このとき，$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, $\partial_i g_{jk} = \Gamma_{ij}^l g_{lk} + g_{jl}\Gamma_{ik}^l$．定理 4.1.2 の証明と同様に，これに i, j, k を j, k, i におきかえた式を足し，k, i, j におきかえた式を引くと，$\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} = 2\Gamma_{ij}^l g_{lk}$ が得られる．よって $g^{ij}g_{jk} = \delta^i{}_k$ とすると，

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \tag{4.1}$$

したがって ∇_i は第 1 基本形式で書ける微分作用素である．すなわち U 上のリーマン計量に対して定義できる．これを **レビチビタ接続** とよぶ．$W(\partial_j\varphi) = \sum_{i=1}^{n} W_j^i\,\partial_i\varphi$ とおくと，

$$\pi_{\perp}\partial_i\partial_j\varphi = \langle \partial_i\partial_j\varphi, \nu\rangle\nu = -\langle \partial_j\varphi, \partial_i\nu\rangle\nu = W_{ji}\nu.$$

よって

$$\begin{aligned}
\pi_{\top}\partial_i\partial_j\partial_k\varphi &= \nabla_i(\nabla_j + \pi_{\perp}\partial_j)\partial_k\varphi \\
&= \nabla_i(\nabla_j(\partial_k\varphi) + W_{kj}\nu) \\
&= \nabla_i\nabla_j(\partial_k\varphi) + W_{kj}\partial_i\nu \\
&= \nabla_i\nabla_j(\partial_k\varphi) - \sum_{m=1}^{n} W_{kj}W_i^m\partial_m\varphi.
\end{aligned}$$

$\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$ より，**theorema egregium**

$$(\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)(\partial_k\varphi) = \sum_{m=1}^{n}(W_{kj}W_i^m - W_{ki}W_j^m)\partial_m\varphi$$

が得られる．左辺は第 1 基本形式すなわち超曲面のリーマン計量で書ける．こうして形作用素の 2 次小行列式 $W_j^lW_i^m - W_i^lW_j^m$ が，すなわち線型写像

$$\bigwedge^2 W_p : \bigwedge^2 T_pM \to \bigwedge^2 T_pM$$

が第 1 基本形式で書けることがわかった．

$R_{ijkl} = \langle(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)(\partial_j\varphi),\ \partial_i\varphi\rangle$ とおくと，これは

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}, \quad R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$$

をみたす．この関係式より，(R_{ijkl}) は $S^2(\bigwedge^2\mathbb{R}^n) \to \bigwedge^4\mathbb{R}^n$ の核に属する．その次元は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n-1)\left(\frac{1}{2}n(n-1)+1\right) - \binom{n}{4} = \frac{1}{12}n^2(n^2-1).$$

(R_{ijkl}) をリーマン計量 (g_{ij}) の **リーマン曲率** という．これを用いると theorema egregium は

$$R_{ijkl} = W_{jl}W_{ik} - W_{jk}W_{il}$$

と書ける．

4.1.4 リーマン計量と座標系

$\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上のリーマン計量 g を座標系 (x^i) に対して

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\mathrm{d}x^i\cdot\mathrm{d}x^j \quad (g_{ji} = g_{ij} \in C^\infty(U))$$

と書く．$p \in U$ に対し $x^i(p) = 0$ として，g_{ij} を (x^k) に関してマクローリン展開すると，0 次の項は $\frac{1}{2}n(n+1)$ 個の成分をもち，1 次の項は $\frac{1}{2}n^2(n+1)$ 個，2 次の項は $(\frac{1}{2}n(n+1))^2$ 個の成分をもつ．

一方，座標系 (X^a) $(X^a(p) = 0)$ に対して $g_{\mathrm{euc}} = \sum_{a=1}^n \mathrm{d}X^a\mathrm{d}X^a$ と書けるユークリッド計量を座標系 (x^i) によって書くと，

$$(g_{\mathrm{euc}})_{ij} = \sum_{a=1}^{n}\frac{\partial X^a}{\partial x^i}\frac{\partial X^a}{\partial x^j}$$

となる．

(X^a) を (x^i) に関してマクローリン展開すると，0 次の項はなく，1 次の項は n^2 個，2 次の項は $\frac{1}{2}n^2(n+1)$ 個，3 次の項は $\frac{1}{6}n^2(n+1)(n+2)$ 個の成分

をもつ．$((g_{\mathrm{Euc}})_{ij})$ の (x^k) に関するマクローリン展開の m 次の項は，(X^a) のマクローリン展開の $m+1$ 次の項によって決まる．座標系をうまく取ると，$((g_{\mathrm{Euc}})_{ij})$ の 1 次以下の項は任意の形にすることができる．ところが $((g_{\mathrm{Euc}})_{ij})$ の 2 次の項は $\dfrac{1}{6}n^2(n+1)(n+2)$ 個の自由度をもち，一方 (g_{ij}) の 2 次の項は $\left(\dfrac{1}{2}n(n+1)\right)^2$ 個の成分をもつ．$n \geq 2$ のとき

$$\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2 - \frac{1}{6}n^2(n+1)(n+2) = \frac{1}{12}n^2(n^2-1) > 0$$

より，ユークリッド計量でないリーマン計量が存在することがわかる．次元の一致から予想されるように，実はリーマン曲率がリーマン計量がどれくらいユークリッド計量でないかを表している．

4.2 アフィン接続

4.2.1 葉層構造とフロベニウスの定理

微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ は，『xy 平面の各点にそれを通る直線を指定するもの』であり，その解とは，『平面を埋めつくす曲線の族であって，各点における曲線の接線が微分方程式の指定する直線になっているもの』のことである．『平面を埋めつくす曲線の族』は『無限に細かい縞模様』のイメージで思い浮かべることができる．連続的な対象を離散的なもので近似して了解しているわけで，電場を電気力線によって直観的に把握するのに似ている．

『無限に細かい縞模様』の概念を一般に定義しよう．$n+r$ 次元多様体 M 上の余次元 r の **葉層** $\mathcal{F}$ とは，分割 $M = \bigsqcup_{\mathcal{L}\in\mathcal{F}} \mathcal{L}$ であって，M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ と微分同相の族 $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to B^n \times B^r\}_{\alpha\in\Lambda}$ が存在して，

$$\varphi_\alpha(B^n \times \{q\}) = \mathcal{L}_q \cap U_\alpha \quad (q \in B^r,\ \mathcal{L}_q \in \mathcal{F})$$

がなりたつもののことである．$\mathcal{F}$ の元を **葉** という．葉 $\mathcal{L}$ は局所的に M の部分多様体なので，点 $p \in \mathcal{L}$ における $\mathcal{L}$ の接ベクトル空間が定義される．これを $T_p\mathcal{F}$ と書き，TM の部分ベクトル束 $T\mathcal{F} = \bigsqcup_{p\in M} T_p\mathcal{F}$ を葉層 $\mathcal{F}$ の接ベクトル束とよぶことにする．

では逆に接ベクトル束の部分ベクトル束が葉層の接ベクトル束で尽きているかというとそうはなっていないところがおもしろいところでありこの本のテーマも正にそこにあると言えるだろう．

TM の部分ベクトル束 $\mathcal{D}$ がある葉層構造の接ベクトル束になっているとき，$\mathcal{D}$ は **可積分** であるという．$n+r$ 次元多様体 M の接ベクトル束の階数 n の部分ベクトル束 $\mathcal{D}$，微分形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ に対し，$\omega|\mathcal{D} \in \Gamma(M, \bigwedge^k \mathcal{D}^*)$ を誘導される切断とし，

$$\Omega^k_{\mathcal{D}^\perp} = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \omega|\mathcal{D} = 0\}$$

とおく．次の定理は常微分方程式の初期値問題の解の存在と一意性の帰結である．

定理 4.2.1 (フロベニウスの定理) 多様体 M の接ベクトル束の部分ベクトル束 $\mathcal{D}$ に対し，次の条件はたがいに同値である：

(i) $\mathcal{D}$ は可積分.

(ii) 任意の $\xi, \eta \in \Gamma(M, \mathcal{D})$ に対し，$[\xi, \eta] \in \Gamma(M, \mathcal{D})$.

(iii) $\mathrm{d}\Omega^1_{\mathcal{D}^\perp} \subset \Omega^2_{\mathcal{D}^\perp}$.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii) は明らか．(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) は，$\xi, \eta \in \Gamma(M, \mathcal{D})$, $\theta \in \Omega^1_{\mathcal{D}^\perp}$ に対し，$\mathrm{d}\theta(\xi, \eta) = -\theta([\xi, \eta])$ であることから従う．

(iii) $\Rightarrow$ (i) を示す．射影 $\theta : TM \to TM/\mathcal{D}$ および $TM/\mathcal{D}$ の局所自明化 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ に対し，ベクトルに値をとる微分形式

$$\theta_\alpha = \varphi_\alpha \circ \theta \in \Omega^1(U_\alpha) \otimes \mathbb{R}^r \quad (\mathrm{rank}\,(TM/\mathcal{D}) = r)$$

が得られる．仮定より，$\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha) \otimes \mathrm{M}_r(\mathbb{R})$ が存在して，

$$\mathrm{d}\theta_\alpha = \omega_\alpha \wedge \theta_\alpha.$$

そこで (i) を $\mathrm{rank}\,\mathcal{D}$ に関する帰納法で示す．

超曲面 $H \subset U_\alpha$ と $\mathcal{D}|U_\alpha$ の零点をもたない切断 ξ で，任意の $p \in H$ において $\xi_p \notin T_pH$ であるものが与えられているとする．余次元 r の部分多様体 $L \subset U_\alpha$ と L 上のベクトル場 η で $\xi_p \in T_pL$ $(p \in L)$, $[\xi, \eta] = 0$ をみたすものは，常微分方程式の解として初期値 $L \cap H$, $\eta|L \cap H$ から局所的に一意的に定まる．このとき，

$$\xi(\theta_\alpha(\eta)) - \eta(\theta_\alpha(\xi)) - \theta_\alpha([\xi, \eta]) = \omega_\alpha(\xi)\theta_\alpha(\eta) - \omega_\alpha(\eta)\theta_\alpha(\xi)$$

より，$\xi(\theta_\alpha(\eta)) = \omega_\alpha(\xi)\theta_\alpha(\eta)$ である．常微分方程式の解の一意性より，$\theta_\alpha(\eta)|L \cap H = 0$ すなわち $\eta_p \in \mathcal{D}_p$ $(p \in L \cap H)$ ならば，$\theta_\alpha(\eta) = 0$ すなわち $\eta_p \in \mathcal{D}_p$ $(p \in L)$ である．したがって，$T(L \cap H) \subset \mathcal{D}|L \cap H$ ならば $TL = \mathcal{D}|L$ となる． □

幾何学におけるこの定理の重要性はいくら強調してもしすぎることはない．この定理を深めることができればその意義ははかり知れないが，正則ホロノミック D 加群とパーバース層の間のリーマン＝ヒルベルト対応はそれに相当するものである．この理論はグロタンディークのホモロジー代数によって記述される．また，ホモロジー代数の基本等式 $dd = 0$ は，フロベニウスの定理の意味での可積分性の類似である．

4.2.2 $\mathbb{R}^n$ の開集合上のアフィン接続

$\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上の C^∞ **アフィン構造** とは，U から $\mathbb{R}^n$ への C^∞ はめこみの，アフィン変換に関する同値類のこととする．すなわち，2 つのアフィン座標系

$$X = (X_a)_{a=1}^n, Y = (Y_a)_{a=1}^n : U \to \mathbb{R}^n$$

が同値であるのは $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ が存在して，$Y = PX + \boldsymbol{q}$ と書けることである．

C^∞ はめこみ $X, Y : U \to \mathbb{R}^n$ が $Y = PX + \boldsymbol{q}$ をみたすとする．これに対し，定数 $P, \boldsymbol{q}$ を消去して微分方程式を立てる．

$(x^1, \ldots, x^n)$ を U 上の座標系とし，$\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ とする．M 上の C^∞ 関数を成分とする n 次正則行列

$$\Phi = (\Phi_{ai}) = (\partial_i X_a), \qquad \Psi = (\Psi_{ai}) = (\partial_i Y_a)$$

を考えると，$\Psi = P\Phi$, $\mathrm{d}\Psi = P\mathrm{d}\Phi$ より，$\Phi^{-1}\mathrm{d}\Phi = \Psi^{-1}\mathrm{d}\Psi$ である．したがって 1 次微分形式を成分とする n 次正方行列

$$\Gamma = \left(\sum_{k=1}^n \Gamma^i_{kj}\mathrm{d}x^k\right) = \Phi^{-1}\mathrm{d}\Phi, \quad \Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_{jk} = \sum_{a=1}^n (\Phi^{-1})^{ia}\partial_j\partial_k X_a$$

こそがアフィン空間の構造を与えていると考えられる．これに対し

$$\Phi\,\mathrm{d}(\Phi^{-1}) + (\mathrm{d}\Phi)\Phi^{-1} = \mathrm{d}(\Phi\Phi^{-1}) = 0$$

より，$\mathrm{d}\Gamma = -\Phi^{-1}(\mathrm{d}\Phi)\Phi^{-1} \wedge \mathrm{d}\Phi = -\Gamma \wedge \Gamma$ となる．

U 上の別の座標系 $(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n)$ に対し，

$$J = (J^i{}_j) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^{\hat{j}}}\right), \quad \widehat{\Phi} = (\widehat{\Phi}_{aj}) = \left(\frac{\partial X_a}{\partial \hat{x}^{\hat{j}}}\right)$$

とおくと，$\widehat{\Phi} = \Phi J$ なので，

$$\widehat{\Phi}^{-1}\mathrm{d}\widehat{\Phi} = (\Phi J)^{-1} \circ \mathrm{d}(\Phi J) = J^{-1}\mathrm{d}J + J^{-1}(\Phi^{-1}\mathrm{d}\Phi)J$$

となる．そこで次の概念を導入する．

定義 4.2.1 U 上の 1 次微分形式を成分とする n 次正方行列

$$\Gamma = \left(\sum_{k=1}^n \Gamma^i_{kj}\mathrm{d}x^k\right)$$

を **アフィン接続**，関数 Γ^i_{kj} を **クリストフェル記号** という．

$\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$ を **ねじれ**，$\mathrm{d}\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma$ を **曲率** という．ねじれが 0 であるアフィン接続を **対称な** アフィン接続といい，曲率が 0 であるアフィン接続を **平坦な** アフィン接続という．

Γ を U 上の対称かつ平坦なアフィン接続とする．$\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ の一般の元を表す記号 u を $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 上の $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 値関数と見ると，$\mathrm{d}u$ は $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 上の $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 値 1 次微分形式である．

$U \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 上の 1 次微分形式を成分とする n 次正方行列 $\mathrm{d}u - u\Gamma$ に対し，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}u - u\Gamma) &= -(\mathrm{d}u) \wedge \Gamma - u\,\mathrm{d}\Gamma \\ &= -(\mathrm{d}u - u\Gamma) \wedge \Gamma - u(\mathrm{d}\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma) \\ &= -(\mathrm{d}u - u\Gamma) \wedge \Gamma.\end{aligned}$$

よってフロベニウスの定理より，局所的に $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ に値をとる C^∞ 写像 Φ が存在して，$\mathrm{d}\Phi - \Phi\Gamma = 0$.

$\mathrm{d}(\det \Phi) = (\det \Phi)\mathrm{tr}(\Gamma)$ なので，ある点 $p_0 \in U$ で $\Phi(p_0) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ならば，任意の点 $p \in U$ で $\Phi(p) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

ゆえに $\Gamma = \Phi^{-1}\mathrm{d}\Phi$, $\partial_k \Phi_{ij} = \sum_{l=1}^n \Phi_{il}\Gamma^l_{jk}$ となる．ゆえに

$$\partial_k \Phi_{ij} - \partial_j \Phi_{ik} = \sum_{l=1}^n \Phi_{il}(\Gamma^l_{jk} - \Gamma^l_{kj}) = 0.$$

よってポアンカレの補題より，局所的に $\mathbb{R}^n$ に値をとる C^∞ 写像 $X = (X_i)_{i=1}^n$ が存在して，$\Phi_{ij} = \partial_j X_i$ となる．

そういうわけで，平坦な対称アフィン接続はアフィン空間の構造を局所的に見たものと言える．

4.2.3 共変微分

アフィン接続 $\left(\sum_{k=1}^n \Gamma^i_{kj}\mathrm{d}x^k\right)$ と U 上のベクトル場

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i\partial_i, \quad \eta = \sum_{i=1}^n \eta^i\partial_i$$

に対し，ベクトル場

$$\nabla_\xi \eta = \sum_{i,\,j=1}^n \xi^i(\partial_i\eta^j)\partial_j + \sum_{i,\,j,\,k=1}^n \Gamma^k_{ij}\xi^i\eta^j\partial_k$$

を ξ による η の **共変微分** という．これは

$$\nabla_\xi(f\eta) = (\xi f)\eta + f\nabla_\xi\eta, \quad \nabla_{f\xi}\eta = f\nabla_\xi\eta$$

をみたす．

$$T^\nabla(\xi,\,\eta) = \nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi - [\xi,\,\eta] = \sum_{i,\,j,\,k=1}^n (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\xi^i\eta^j\partial_k$$

を **ねじれ** といい，

$$R^\nabla(\xi, \eta) = [\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi, \eta]} = i_\eta i_\xi(\mathrm{d}\varGamma + \varGamma \wedge \varGamma)$$

を **曲率** という．

4.2.4 多様体上のアフィン接続

多様体 M 上のベクトル場 $\xi \in \Gamma(M, TM)$ に線型写像 $\nabla_\xi : \Gamma(M, TM) \to \Gamma(M, TM)$ を対応させる写像 ∇ で，任意の $f \in C^\infty(M)$, $\eta \in \Gamma(M, TM)$ に対し，

$$\nabla_\xi(f\eta) = (\xi f)\eta + f\nabla_\xi\eta, \quad \nabla_{f\xi} = f\nabla_\xi$$

をみたすものを **アフィン接続** という．局所座標系を与えるとアフィン接続はクリストフェル記号によって表される．

ベクトル場 η が **平行** であるとは，任意のベクトル場 ξ に対し $\nabla_\xi\eta = 0$ をみたすことである．

$$T^\nabla(\xi, \eta) = \nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi - [\xi, \eta]$$

を **ねじれ** といい，

$$R^\nabla(\xi, \eta) = [\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi, \eta]}$$

を **曲率** という．ねじれが 0 であることを **対称** であるといい，曲率が 0 であることを **平坦** であるという．前節の議論と同様にして，フロベニウスの定理より次が従う．

定理 4.2.2 n 次元多様体に対し，対称アフィン接続が平坦であることは，局所的に，平行な n 個のベクトル場で各点において 1 次独立なものが存在することに同値である．

対称アフィン接続 ∇ に対し，

$$\begin{aligned} R^\nabla(\xi, \eta)\zeta &= \nabla_\xi\nabla_\eta\zeta - \nabla_\eta\nabla_\xi\zeta - \nabla_{[\xi, \eta]}\zeta \\ &= \nabla_\xi\nabla_\eta\zeta - \nabla_\eta\nabla_\xi\zeta - \nabla_\zeta[\xi, \eta] + [[\xi, \eta], \zeta] \\ &= \nabla_\xi\nabla_\eta\zeta - \nabla_\eta\nabla_\xi\zeta - \nabla_\zeta\nabla_\xi\eta + \nabla_\zeta\nabla_\eta\xi + [[\xi, \eta], \zeta]. \end{aligned}$$

よって次が従う．これをビアンキ恒等式という．

$$R^\nabla(\xi, \eta)\zeta + R^\nabla(\eta, \zeta)\xi + R^\nabla(\zeta, \xi)\eta = 0. \tag{4.2}$$

4.2.5 測地線と指数写像

多様体 M 上の対称アフィン接続 ∇ に対し，M 上の曲線 $\gamma(t)$ で

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0, \quad \dot\gamma = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \tag{4.3}$$

をみたすものを **測地線** という．

点 p における接ベクトル $\xi \in T_pM$ に対し，測地線の微分方程式 (4.3) の解 γ_ξ で初期条件

$$\gamma_\xi(0) = p, \quad \frac{\mathrm{d}\gamma_\xi}{\mathrm{d}t}(0) = \xi$$

をみたすものを考え，写像 $\exp_p^\nabla : T_pM \to M$ を $\exp_p^\nabla(\xi) = \gamma_\xi(1)$ によって定義する．これを点 p における **指数写像** という．p も動かせば写像 $\exp^\nabla : TM \to M$ が得られる．点 p における指数写像は接ベクトル空間 T_pM における原点の近傍から p の近傍への微分同相を与える．

接ベクトル空間 T_pM の基底に対し，指数写像により p の近傍の座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$ が得られる．これを点 p における **測地的法座標系** という．点 p は $x^1 \cdots x^n$ 空間の原点に，点 p を通る測地線は原点を通る直線に写される．したがって $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$.

4.2.6 ヤコビ場

さらに M 上の曲面 $\gamma(t, s)$ に対し，$\dot\gamma = \dfrac{\partial\gamma}{\partial t}$, $\gamma' = \dfrac{\partial\gamma}{\partial s}$ とおくと，$[\dot\gamma, \gamma'] = 0$. よって，

$$\nabla_{\gamma'}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\gamma'}\dot\gamma + R^\nabla(\gamma', \dot\gamma)\dot\gamma = \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\gamma' + R^\nabla(\gamma', \dot\gamma)\dot\gamma.$$

そこで，測地線 $\gamma(t)$ 上のベクトル場 ξ で

$$(\nabla_{\dot\gamma})^2\xi + R^\nabla(\xi, \dot\gamma)\dot\gamma = 0 \tag{4.4}$$

をみたすものを **ヤコビ場** とよぶ．測地線の変形からヤコビ場が得られる．

4.3 リーマン多様体

4.3.1 リーマン多様体

実ベクトル束 $\pi : E \to M$ の各ファイバー E_p $(p \in M)$ 上の擬内積 [内積] の族 $g = (g_p)_{p \in M}$ であって，写像 $E \times_M E \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto g_p(u, v)$ $(u, v \in E_p)$ が C^∞ 関数であるものを，E 上の擬内積 [内積] あるいは計量という．

多様体の接ベクトル束の擬内積を **擬リーマン計量**，内積を **リーマン計量** という．正定値でない擬内積は **ローレンツ計量** とよばれる．多様体と擬リーマン計量 [リーマン計量，ローレンツ計量] の組 (M, g) を **擬リーマン多様体** [**リーマン多様体**，**ローレンツ多様体**] という．1 の分割を用いて，多様体上に必ずリーマン計量が存在することが証明される．点 p を含む開集合上の局所座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$ に対し，$g_{ij}(p) = g_p(\partial_i, \partial_j)$ とおく．各点 $p \in M$ に対し，そのまわりの局所座標系を $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ となるように取ることができる．

4.3.2 曲線の長さ

リーマン多様体 (M, g) 上の曲線 C に対し，その長さ $L(C)$ が定義される．これは C のパラメータ表示 $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ を用いて

$$L(C) = \int_{t_0}^{t_1} g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t$$

と表される．右辺はパラメータ表示の取り方によらない．

連結リーマン多様体 M 上の 2 点間の距離を，2 点を結ぶ曲線の長さの下限として定義することができる．

4.3.3 レビチビタ接続

リーマン多様体 (M, g) 上の対称アフィン接続 ∇ で，リーマン計量を保つもの，すなわち $\xi\, g(\eta, \zeta) = g(\nabla_\xi \eta, \zeta) + g(\eta, \nabla_\xi \zeta)$ をみたすものが一意的に存在する．実際，この式に，ξ, η, ζ を η, ζ, ξ におきかえた式を足し，ζ, ξ, η におきかえた式を引くと，

$$\begin{aligned} &\xi\, g(\eta, \zeta) + \eta\, g(\zeta, \xi) - \zeta\, g(\xi, \eta) \\ &= g(2\nabla_\xi \eta - [\xi, \eta], \zeta) + g([\xi, \zeta], \eta) + g([\eta, \zeta], \xi). \end{aligned} \tag{4.5}$$

この式によって ∇ を定義すればよい．∇ を (M, g) 上の **レビチビタ接続** という．リーマン計量を定数倍してもレビチビタ接続は変わらず，よって指数写像も変わらない．レビチビタ接続の曲率を **リーマン曲率** という．

$$\begin{aligned} \xi_1\xi_2\, g(\xi_3, \xi_4) &= g(\nabla_{\xi_1}\nabla_{\xi_2}\xi_3, \xi_4) + g(\nabla_{\xi_2}\xi_3, \nabla_{\xi_1}\xi_4) \\ &\quad + g(\nabla_{\xi_1}\xi_3, \nabla_{\xi_2}\xi_4) + g(\xi_3, \nabla_{\xi_1}\nabla_{\xi_2}\xi_4), \\ [\xi_1, \xi_2]\, g(\xi_3, \xi_4) &= g(\nabla_{[\xi_1,\xi_2]}\xi_3, \xi_4) + g(\xi_3, \nabla_{[\xi_1,\xi_2]}\xi_4) \end{aligned}$$

より，$g(R^\nabla(\xi_1, \xi_2)\xi_3, \xi_4) + g(\xi_3, R^\nabla(\xi_1, \xi_2)\xi_4) = 0$．$g(R^\nabla(\xi_1, \xi_2)\xi_3, \xi_4)$ を $[1234]$ と略記すると，(4.2) より，

$$\begin{aligned} [1234] + [2143] &= -[2314] - [3124] - [1423] - [4213] \\ &= -[3241] - [1342] - [4132] - [2431] = [3412] + [4321]. \end{aligned}$$

よって $g(R^\nabla(\xi_1, \xi_2)\xi_3, \xi_4) = g(R^\nabla(\xi_3, \xi_4)\xi_1, \xi_2)$．この計算の背後に，4 次対称群が正八面体群に同型であるということがある．

局所座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$ に対し，

$$\Gamma_{ijk} = g(\nabla_{\partial_j}\partial_k, \partial_i), \quad R_{ijkl} = g(R^\nabla(\partial_k, \partial_l)\partial_j, \partial_i)$$

とおくと，$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj} = \dfrac{1}{2}(\partial_j g_{ijk} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk})$ であり，

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk},\ R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0,\ R_{klij} = R_{ijkl}. \tag{4.6}$$

したがって，

$$\sum_{i,j,k,l} R_{ijkl}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^l = 0. \tag{4.7}$$

4.3.4 測地線

リーマン多様体 (M, g) 上の曲線の族 $\{C_s\}_{s\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ に対し，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}L(C_s)$ をレビチビタ接続を用いて表すことができる．パラメータ表示の族を

$$\gamma : [t_0, t_1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

とし，$\gamma(t_0, s)$, $\gamma(t_1, s)$ は s によらないと仮定する．さらにパラメータ表示を

$$\frac{\partial}{\partial t}\, g(\dot\gamma, \dot\gamma) = 0, \quad \dot\gamma = \frac{\partial\gamma}{\partial t}$$

となるように取る．このとき，$\gamma' = \dfrac{\partial\gamma}{\partial s}$ とおくと，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}L(C_s) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial s}\left(g(\dot\gamma, \dot\gamma)^{1/2}\right)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} g(\dot\gamma, \dot\gamma)^{-1/2} g(\dot\gamma, \nabla_{\gamma'}\dot\gamma)\,\mathrm{d}t.$$

そして

$$g(\dot\gamma, \nabla_{\gamma'}\dot\gamma) = g(\dot\gamma, \nabla_{\dot\gamma}\gamma') = \frac{\partial}{\partial t}\, g(\dot\gamma, \gamma') - g(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \gamma'),$$

$$\int_{t_0}^{t_1} g(\dot\gamma, \dot\gamma)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial t}\, g(\dot\gamma, \gamma')\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial t}[g(\dot\gamma, \dot\gamma)^{-1/2} g(\dot\gamma, \gamma')]\,\mathrm{d}t = 0.$$

したがって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}L(C_s) = -\int_{t_0}^{t_1} g(\dot\gamma, \dot\gamma)^{-1/2} g(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \gamma')\,\mathrm{d}t.$$

よって $\dfrac{\partial}{\partial t}\, g(\dot\gamma, \dot\gamma) = 0$ の下での曲線の長さ $L(C)$ の臨界点は，$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ をみたす，すなわち測地線である．

測地線はエネルギー汎関数

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} g(\dot\gamma, \dot\gamma)\,\mathrm{d}t$$

の臨界点でもある．

4.3.5 測地的法座標系

リーマン多様体 (M, g) のレビチビタ接続の場合，点 p における測地的法座標系はさらに $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ をみたすと仮定する．

定理 4.3.1 リーマン多様体 (M, g) の点 p における測地的法座標系 $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ に対し，

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3}\sum_{k,\,l} R_{ikjl}(p)\,x^k x^l + O(\|\boldsymbol{x}\|^3),$$

$$\Gamma_{ijk} = -\frac{1}{3}\sum_{l}(R_{ijkl} + R_{ikjl})(p)x^l + O(\|\boldsymbol{x}\|^2).$$

証明 測地的法座標系に対し，$g_{ij} = \delta_{ij} + O(\|\boldsymbol{x}\|^2)$.

$t = 0$ のとき点 p を通る測地線 $\gamma(t)$ は $x^i(\gamma(t)) = t\xi^i$ と表され，よって $\dot{\gamma} = \sum_i \xi^i \partial_i$. ベクトル場 $V_{i,\,\gamma(t)} = t\partial_i$ は $\dot{\gamma}$ と可換であり，

$$(\nabla_{\dot{\gamma}})^2 V_i = \nabla_{\dot{\gamma}}\nabla_{V_i}\dot{\gamma} = R^{\nabla}(\dot{\gamma},\, V_i)\,\dot{\gamma}.$$

よって V_i は $\gamma(t)$ に対するヤコビ場であり，さらに

$$V_{i,\,p} = 0, \quad (\nabla_{\dot{\gamma}}V_i)_p = \partial_i, \quad \big((\nabla_{\dot{\gamma}})^2 V_i\big)_p = 0.$$

ヤコビ場の方程式 (4.4) を $\dot{\gamma}$ で共変微分すると，

$$(\nabla_{\dot{\gamma}})^3 V_i + R(\partial_i,\, \dot{\gamma})\,\dot{\gamma} = 0.$$

ここで $h(t) = g_{\gamma(t)}(V_i,\, V_j) = t^2\, g_{ij}(\gamma(t))$ とおいて，第 4 次導関数 $h^{(4)}(0)$ を 2 通りに計算すると，

$$\begin{aligned}
h^{(4)}(0) &= 4\,g_p((\nabla_{\dot{\gamma}})^3 V_i,\, \partial_j) + 4\,g_p(\partial_i,\, (\nabla_{\dot{\gamma}})^3 V_j)\\
&= -4\,g_p(R(\partial_i,\, \dot{\gamma})\dot{\gamma},\, \partial_j) - 4\,g_p(\partial_i,\, R(\partial_j,\, \dot{\gamma})\dot{\gamma})\\
&= -4\sum_{k,\,l} R_{jlik}(p)\,\xi^k\xi^l - 4\sum_{k,\,l} R_{ikjl}(p)\,\xi^k\xi^l\\
&= -8\sum_{k,\,l} R_{ikjl}(p)\xi^k\xi^l,\\
h^{(4)}(0) &= \binom{4}{2}\cdot 2\cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\, g_{ij}(\gamma(t))\bigg|_{t=0}\\
&= 12\sum_{k,\,l}\partial_k\partial_l g_{ij}(p)\,\xi^k\xi^l.
\end{aligned}$$

これより第 1 の等式が従う．

第 2 の等式は $\Gamma_{ijk} = \dfrac{1}{2}\,(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$ より従う． □

リーマン多様体 M の部分多様体 S の点 p における法ベクトル空間は，T_pM における T_pS の直交補空間と見なす．

n 次元リーマン多様体上の測地線 C に対し，法ベクトル束の平行な $n-1$ 個の切断で各点において正規直交基底を与えるものを考える．C の各点からの指数写像によるこれらの切断の像と測地線上の弧長パラメータとによって，C の近傍における局所座標系が得られる．これを **フェルミ座標系** という．これに対するクリストフェル記号は C 上で消える．これは一般相対論における **等価原理** に対応する事実である．

4.3.6 体積要素とリッチ曲率

リーマン計量 (g_{ij}) を正方行列と見たときの行列式の平方根を g とすると，$\mathrm{d}\mu_g = \sqrt{g}\,|\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n|$ は局所座標の取り方によらないので，M 上の体積要素を定める．ユークリッド計量が誘導する体積要素を $\mathrm{d}\mu_0$ とする．

$$R^{\nabla}(\partial_k, \partial_l)\partial_j = \sum_i R^i{}_{jkl}\partial_i, \quad R_{ij} = \sum_k R^k{}_{ikj}$$

とおくと，$R_{ji} = R_{ij}$ である．共変対称テンソル場

$$\mathrm{Ric}_g = \sum_{i,j} R_{ij}\,\mathrm{d}x^i \cdot \mathrm{d}x^j$$

を **リッチ曲率** という．定理 4.3.1 より，次が従う．

定理 4.3.2 リーマン多様体 (M, g) の点 p における測地的法座標系 $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ に対し，

$$\mathrm{d}\mu_g = \mathrm{d}\mu_0 \left(1 - \frac{1}{6} \sum_{i,j} R_{ij}(p)\, x^i x^j + O(\|\boldsymbol{x}\|^3) \right).$$

したがってリッチ曲率が正定値ならば，ユークリッド空間と比べて，同じ半径の球の体積は小さくなる．

$\sum_j g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$ によって g^{ij} を定める．

$$\kappa = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij} = \sum_{i,j,k} g^{ij} R^k{}_{ikj}$$

を **スカラー曲率** という．

第 5 章
リー群から ASD 方程式へ

リーマンの講演『幾何学の基礎をなす仮説について』から 100 年の時が流れた．1954 年，物理学者楊振寧とミルズは，原子核レベルではたらく力を説明するため，非アーベル・リー群 SU(2) を用いて電磁気学を拡張する，非アーベル・ゲージ理論を世に問うた．それは主束というファイバー束の上で定義される接続という量を力の場とするものであった．（日中戦争時，学生だった楊は難を避けて昆明に移り住んだが，後にファーバー束の礎を築くことになる数学者陳省身もまた奇しくも同じ昆明にいたという．）電磁場という力の場は電荷に力を及ぼすが，自分自身には力を及ぼさない．これに対して非アーベル・ゲージ理論における力の場は，非アーベル性の帰結として電荷がないところでも複数の場たちが力を及ぼし合う，魑魅魍魎の世界である．

それは，水素爆弾の開発で覇を競っていた米ソの権力中枢において，マッカーシズム，スターリン批判の嵐が吹き荒れた時代のできことであった．

5.1 リー群とリー環

5.1.1 一般線型群の非可換性

可換環 A の元を成分とする n 次正方行列全体の集合を $\mathrm{M}_n(A)$ とする．このうち逆行列をもつもの，すなわち行列式が可逆であるもの全体のなす部分集合 $\mathrm{GL}_n(A)$ は行列の積について群をなす．これを A 上の一般線型群という．$n \geq 2$ のときこの群は非可換である．その非可換性について調べる．

零行列を O，単位行列を E と書く．体 K の元を成分とする行列 $X, Y \in \mathrm{M}_n(K)$ に対し，$\varepsilon^3 = 0$ となる変数 ε を導入すると，

$$
\begin{aligned}
&(E+\varepsilon X)(E+\varepsilon Y)(E+\varepsilon X)^{-1}(E+\varepsilon Y)^{-1} \\
&= (E+\varepsilon X)(E+\varepsilon Y)(E-\varepsilon X+\varepsilon^2 X^2)(E-\varepsilon Y+\varepsilon^2 Y^2) \\
&= E+\varepsilon^2(XY-YX).
\end{aligned}
$$

そこで演算 $[X, Y] = XY - YX$ を導入すると，これは

$$[X, X] = O, \quad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = O$$

をみたす．

5.1.2 リー環

体 K 上のベクトル空間 $\mathfrak{g}$ に双線型写像 $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$（リー括弧積とよぶ）が与えられ，反対称律，ヤコビ律

$$[x, x] = 0, \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

がなりたつとき，$\mathfrak{g}$ を K 上の **リー環**（リー代数）という．たったこれだけの公理系だが，線型代数のおかげで非常に役に立つ概念となっている．

$\mathbb{R}$ 上のリー環を実リー環，$\mathbb{C}$ 上のリー環を複素リー環という．リー環の間の線型写像 $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ で $[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x, y])$ をみたすものを準同型という．リー環 $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{h}$ で任意の $x, y \in \mathfrak{h}$ に対し $[x, y] \in \mathfrak{h}$ をみたすものを $\mathfrak{g}$ の部分リー環という．

$\mathrm{M}_n(K)$ は $[X, Y] = XY - YX$ により K 上のリー環になる．また，K ベクトル空間 V に対し，$\mathrm{End}(V)$ を V から V への K 線型写像全体のなす K 代数とすると，$\mathrm{End}(V)$ も同様に K 上のリー環になる．

K 上のリー環 $\mathfrak{g}$ と K ベクトル空間 V に対し，リー環の準同型 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ を V 上の $\mathfrak{g}$ の **表現** という．準同型 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{ad}(\xi)\eta = [\xi, \eta]$ を **随伴表現** という．

多様体 M に対し，ベクトル場の全体 $\Gamma(M, TM)$ はリー括弧積により実リー環になる．実リー環 $\mathfrak{g}$ から $\Gamma(M, TM)$ への準同型を $\mathfrak{g}$ の M への作用という．

5.1.3 一般線型群の部分群

体 K に対し，行列式が 1 であるもの全体のなす $\mathrm{GL}_n(K)$ の部分群 $\mathrm{SL}_n(K)$ を特殊線型群という．

正方行列 X で $X^{\mathrm{T}}X = XX^{\mathrm{T}} = E$ をみたすものを直交行列という（X^{T} は X の転置）．直交行列全体のなす $\mathrm{GL}_n(K)$ の部分群 $\mathrm{O}_n(K)$ を直交群といい，$\mathrm{SO}_n(K) = \mathrm{O}_n(K) \cap \mathrm{SL}_n(K)$ を特殊直交群あるいは回転群という．$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ は $\mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n)$ と書くことが多い．

複素正方行列 X で $X^*X = XX^* = E$ をみたすものをユニタリ行列という（X^* は X の転置の各成分の複素共役を取ったもの）．ユニタリ行列全体のなす $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の部分群 $\mathrm{U}(n)$ をユニタリ群といい，$\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ を特殊ユニタリ群という．

(p, q) 型零行列を $O_{p,q}$，n 次単位行列を E_n とする．$I_{p,q} = \begin{bmatrix} E_p & O_{p,q} \\ O_{q,p} & -E_q \end{bmatrix}$

とおく．$p+q$ 次実正方行列 X で $X^{\mathrm{T}}I_{p,q}X = I_{p,q}$ をみたすもの全体のなす $\mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R})$ の部分群 $\mathrm{O}(p, q)$ をローレンツ群といい，$\mathrm{SO}(p, q) = \mathrm{O}(p, q) \cap \mathrm{SL}_{p+q}(\mathbb{R})$ を特殊ローレンツ群という．$p+q$ 次複素正方行列 X で $X^* I_{p,q} X = I_{p,q}$ をみたすもの全体のなす $\mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{C})$ の部分群を $\mathrm{U}(p, q)$ と書き，$\mathrm{SU}(p, q) = \mathrm{U}(p, q) \cap \mathrm{SL}_{p+q}(\mathbb{C})$ と書く．

$J = \begin{bmatrix} O_{n,n} & -E_n \\ E_n & O_{n,n} \end{bmatrix}$ とおく．$2n$ 次正方行列 X で $X^{\mathrm{T}}JX = J$ をみたすものを斜交行列という．斜交行列の行列式は 1 である．斜交行列全体のなす $\mathrm{GL}_{2n}(K)$ の部分群 $\mathrm{Sp}_{2n}(K)$ をシンプレクティック群という．$\mathrm{Sp}(n) = \mathrm{U}(2n) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ をコンパクト・シンプレクティック群という．また $\mathrm{Sp}(p, q) = \mathrm{U}(p, q) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ $(p+q=2n)$ と書く．

5.1.4 リー群

群 G に位相が与えられていて，群の演算すなわち

$$G \times G \to G,\ (g, h) \mapsto gh; \quad G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$$

が連続であるとき，G を **位相群** という．位相群の準同型とは，群の準同型で連続なもののことである．

位相群 G に多様体の構造が与えられていて群の演算が C^∞ であるとき，G を（実）**リー群** という．リー群の準同型とは，群の準同型で C^∞ なもののことである．リー群の部分群で閉部分多様体であるものを閉部分群という．また，群 G に複素多様体の構造が与えられていて，群の演算が正則であるとき，G を **複素リー群** という．複素リー群の準同型とは，群の準同型で正則なもののことである．

$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とすると，$\mathrm{GL}_n(K)$, $\mathrm{SL}_n(K)$, $\mathrm{O}_n(K)$, $\mathrm{SO}_n(K)$, $\mathrm{Sp}_n(K)$ はリー群であり，$K = \mathbb{C}$ の場合，複素リー群である．$\mathrm{O}(p, q)$, $\mathrm{SO}(p, q)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{U}(p, q)$, $\mathrm{SU}(p, q)$, $\mathrm{Sp}(n)$, $\mathrm{Sp}(p, q)$ はリー群である．$\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$ はコンパクトである．

5.1.5 作用

群 G の集合 M への（左）作用とは，写像 $G \times M \to M$, $(g, p) \mapsto gp$ であって，$(g_1g_2)p = g_1(g_2p)$, $ep = p$ ($g_1, g_2 \in G$, $p \in M$, e は単位元) をみたすものである．G の M への右作用とは，写像 $M \times G \to M$, $(p, g) \mapsto pg$ であって，$p(g_1g_2)p = (pg_1)g_2$, $pe = p$ をみたすものである．左作用 $(g, p) \mapsto gp$ に対し，$(p, g) \mapsto g^{-1}p$ は右作用になる．右作用 $(p, g) \mapsto pg$ に対し，$(g, p) \mapsto pg^{-1}$ は左作用になる．

G が左 [右] から作用する集合を左 [右] G 集合という．左 G 集合の間の写像 $\varphi : M \to M'$ が G 同変であるとは，$\varphi(gp) = g\varphi(p)$ ($g \in G$, $p \in M$) がな

りたつことである．右 G 集合の場合も同様に定義する．

左作用 $G \times M \to M$ において，ある $g \in G$ について $p_2 = gp_1$ という関係は M 上の同値関係である．右作用についても同様である．商集合を，左作用の場合 $G\backslash M$ と書き，右作用の場合 M/G と書く．左作用の場合も M/G と書くことがある．

作用が自由であるとは，任意の p に対して $G \to M$, $g \mapsto gp$ が単射であることである．作用が推移的であるとは，ある p に対して $G \to M$, $g \mapsto gp$ が全射であることである．このとき任意の p に対して $G \to M$, $g \mapsto gp$ は全射である．作用が推移的であるとき，M を G の **等質空間** という．

位相群 G の位相空間 M への左作用は，左作用を与える写像 $G \times M \to M$ が連続であるものとする．右作用の場合も同様．位相群 G の作用する位相空間を G 空間という．

リー群 G の多様体 M への左作用は，左作用を与える写像 $G \times M \to M$ が C^∞ であるものとする．右作用の場合も同様．リー群 G の作用する多様体を G 多様体という．

$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする．K ベクトル空間 V から V への K 線型同型全体のなす群を $\mathrm{GL}(V)$ と書く．準同型 $G \to \mathrm{GL}(V)$ が与えられているとき，誘導される V への G の作用を G の K 上の **表現** という．

K ベクトル束 $\pi : E \to B$ に E への G 作用であって，任意の $g \in G$ に対し $E \to E$, $u \mapsto gu$ がカルテシアン射であるものが与えられているとき，E を G **同変ベクトル束** という．このとき B への G 作用が誘導される．1 点上の G 同変ベクトル束は G の表現に他ならない．

G が作用する多様体 M の接ベクトル束 TM は写像 $M \to M$, $p \mapsto gp$ $(g \in G)$ の微分により自然な G 同変ベクトル束の構造をもつ．これは余接ベクトル束 T^*M，その外積 $\bigwedge^k T^*M$ 上の G 同変ベクトル束の構造を誘導する．

5.1.6 リー群のリー環

リー群 G の G への左作用，右作用をそれぞれ

$$L_g : G \to G,\ L_g(p) = gp,\ R_g : G \to G,\ R_g(p) = pg, \quad g, p \in G,$$

で表す．リー群 G 上のベクトル場 $\xi : G \to TG$, $\xi_p \in T_pG$ $(p \in G)$ が左不変であるとは，任意の $g, p \in G$ に対し，$\mathrm{d}L_g(\xi_p) = \xi_{gp}$ であることをいう．左不変ベクトル場全体のなすリー環 $\mathrm{Lie}(G)$ を G のリー環という．複素リー群のリー環は複素リー環の構造をもつ．各点 $p \in G$ で左不変ベクトル場の値を見る写像 $\mathrm{Lie}(G) \to T_pG$, $\xi \mapsto \xi_p$ は同型であり，$\dim \mathrm{Lie}(G) = \dim G$ である．これは自然な自明化 $G \times \mathrm{Lie}(G) \cong TG$ を与える．

群の同型 $\mathrm{Ad}_g : G \to G$, $\mathrm{Ad}_g(p) = gpg^{-1}$ は，リー環の同型 $\mathrm{Ad}_g : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G)$ を誘導する．すなわち $\xi \in \mathfrak{g}$ に対し，

$$\eta_p = \mathrm{d}(\mathrm{Ad}_g)(\xi_{g^{-1}pg}) = \mathrm{d}R_{g^{-1}}(\xi_{pg}) \quad (p \in G)$$

により $\eta = \mathrm{Ad}_g(\xi) \in \mathfrak{g}$ が定まる．これによって与えられる準同型 $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(G))$ を **随伴表現** という．

5.1.7 線型リー群

$A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ に対し $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^*B)$ とおいて，$\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 上のエルミート内積を与える．$\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 上に制限すると内積である．$\|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle}$ とする．

$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする．べき級数 $\exp(X) = \mathrm{e}^X = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} X^m$ $(X \in \mathrm{M}_n(K))$ は広義一様収束し，C^∞ 写像 $\exp : \mathrm{M}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K)$ を与える．これを指数写像とよぶ．$g \in \mathrm{GL}_n(K)$, $\|g - E\| < 1$ に対し，$\log(g) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(E-g)^n$ は広義一様収束し，C^∞ 写像を与え，$\exp(\log(g)) = g$ をみたす．また，$\|X\| < \log(2)$ ならば，$\|\exp(X) - E\| < 1$, $\log(\exp(X)) = X$ である．$K = \mathbb{C}$ の場合，exp, log は正則である．

リー群 $G = \mathrm{GL}_n(K)$ のリー環は $\mathrm{M}_n(K)$ である．$X \in \mathrm{M}_n(K)$ に対応する G 上の左不変ベクトル場は $p \mapsto pX$ である．リー環として見るときは $\mathfrak{gl}_n(K) = \mathrm{M}_n(K)$ と書くことも多い．

$gp\exp(\xi)g^{-1} = gpg^{-1}\exp(g\xi g^{-1})$ より，随伴表現は $\mathrm{Ad}_g(\xi) = g\xi g^{-1}$ と書ける．

定理 5.1.1 $X, Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ に対し，

(1) $\mathrm{e}^{-sX} Y \mathrm{e}^{sX} = \mathrm{e}^{-s\,\mathrm{ad}(X)}(Y)$.

(2) $\displaystyle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{-X}\,\mathrm{e}^{X+tY}\Big|_{t=0} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{ad}(X)}}{\mathrm{ad}(X)}(Y)$.

証明 (1) 両辺は $s = 0$ のとき一致し，微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} = -[X, F]$ をみたす．

(2)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{e}^{-sX}\,\mathrm{e}^{s(X+tY)}\Big|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s} \mathrm{e}^{-sX}\,\mathrm{e}^{s(X+tY)}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{e}^{-sX}(-X + X + tY)\mathrm{e}^{s(X+tY)}\Big|_{t=0} \\
&= \mathrm{e}^{-sX} Y \mathrm{e}^{sX} = \mathrm{e}^{-s\,\mathrm{ad}(X)}(Y).
\end{aligned}$$

よって，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{-X}\,\mathrm{e}^{X+tY}\Big|_{t=0} = \int_0^1 \mathrm{e}^{-s\,\mathrm{ad}(X)}(Y)\,\mathrm{d}s = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{ad}(X)}}{\mathrm{ad}(X)}(Y). \qquad \square$$

G を群 $\mathrm{GL}_n(K)$ の閉部分群とする．任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $\exp(tX) \in G$ となる $X \in \mathrm{M}_n(K)$ 全体を $\mathfrak{g}$ とすると，これは $\mathrm{M}_n(K)$ の部分リー環になる．このとき $X \in \mathfrak{g}$ に対し，G 上の左不変ベクトル場 $\xi : G \to TG$ を

$$\xi_p = pX = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p\exp(tX)\right|_{t=0} \in T_pG \subset \mathrm{M}_n(K) \quad (p \in G)$$

によって与えることができるので，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ である．$\mathrm{GL}_n(K)$ の閉部分群を線型リー群という．

$\mathrm{SL}_n(K)$ のリー環 $\mathfrak{sl}_n(K)$ は $\mathrm{M}_n(K)$ の元でトレースが 0 のもの全体である．$\mathrm{O}_n(K)$, $\mathrm{SO}_n(K)$, $\mathrm{Sp}_n(K)$, $\mathrm{O}(p, q)$, $\mathrm{SO}(p, q)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{U}(p, q)$, $\mathrm{SU}(p, q)$, $\mathrm{Sp}(n)$, $\mathrm{Sp}(p, q)$（この場合は $p + q = 2n$）のリー環は，それぞれ

$$\begin{aligned}
\mathfrak{o}_n(K) = \mathfrak{so}_n(K) &= \{X \in \mathrm{M}_n(K) \mid X^{\mathrm{T}} + X = O\},\\
\mathfrak{sp}_{2n}(K) &= \{X \in \mathrm{M}_{2n}(K) \mid X^{\mathrm{T}}J + JX = O\},\\
\mathfrak{o}(p, q) = \mathfrak{so}(p, q) &= \{X \in \mathrm{M}_{p+q}(\mathbb{R}) \mid X^{\mathrm{T}}I_{p,q} + I_{p,q}X = O\},\\
\mathfrak{u}(n) &= \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid X^* + X = O\},\\
\mathfrak{su}(n) &= \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid X^* + X = O,\ \mathrm{tr}(X) = 0\},\\
\mathfrak{u}(p, q) &= \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid X^*I_{p,q} + I_{p,q}X = O\},\\
\mathfrak{su}(p, q) &= \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid X^*I_{p,q} + I_{p,q}X = O,\ \mathrm{tr}(X) = 0\},\\
\mathfrak{sp}(n) &= \{X \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{C}) \mid X^{\mathrm{T}}J + JX = X^* + X = O\},\\
\mathfrak{sp}(p, q) &= \{X \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{C}) \mid X^{\mathrm{T}}J + JX = X^*I_{p,q} + I_{p,q}X = O\}
\end{aligned}$$

である．

$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n) = \mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid X^{\mathrm{T}} + X = O\}$ 上の $G = \mathrm{SO}(n)$ 不変内積を $\langle X, Y\rangle = -c \cdot \mathrm{tr}(XY)$ $(c > 0)$ によって与える．$\mathfrak{g}$ の元は G 上の左不変ベクトル場なので，$\mathfrak{g}$ 上の不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は G 上の両側不変リーマン計量を与える．この計量のレビチビタ接続を ∇ とすると，レビチビタ接続を定義したときの関係式 (4.5) より，$\langle 2\nabla_X Y - [X, Y], Z\rangle = 0$, $\nabla_X Y = \dfrac{1}{2}[X, Y]$. よって $\nabla_X X = 0$ となり，$\gamma(t) = p\exp(tX)$ は測地線．よって次が言えた．

定理 5.1.2 $\mathrm{SO}(n)$ において，$\exp_p^{\nabla}(X) = p\exp(X)$.

5.1.8 作用の微分

リー群 G の多様体 M への作用 $\lambda : G \times M \to M$ に対し，

$$\lambda^{\mathrm{Lie}}(\xi)_p = \mathrm{d}\lambda_{(e,p)}(\xi_e, 0) \in T_pM \quad (p \in M,\ \xi \in \mathrm{Lie}(G))$$

により，写像

$$\lambda^{\mathrm{Lie}} : \mathrm{Lie}(G) \to \Gamma(M, TM)$$

を定める．λ^{Lie} はリー環の準同型である．これを作用の微分という．

G の $G \times M$ への作用を $g \cdot (h, p) = (ghg^{-1}, gp)$ で定義すると，$\lambda : G \times M \to M$ は G 同変である．よって，G の $\mathrm{Lie}(G) \times M$ への作用を

$g \cdot (\xi, p) = (\mathrm{Ad}_g(\xi), gp)$ で定義すると，$\widetilde{\lambda}^{\mathrm{Lie}} : \mathrm{Lie}(G) \times M \to TM$ は G 同変である．

リー群 G の G への作用 $\lambda : G \times G \to G$, $\lambda(g, p) = \lambda_g(p) = pg^{-1}$ に対し，$\lambda^{\mathrm{Lie}}(\xi) = \xi$ である．

$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とし V を K ベクトル空間とする．リー群 G の表現 $G \to \mathrm{GL}(V)$ はそのリー環 $\mathrm{Lie}(G)$ の表現 $\mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{End}(V)$ を誘導する．

リー群 $\mathbb{R}$ の多様体 M への作用 $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$, $\varphi(t, p) = \varphi_t(p)$ を **流れ** という．これにより，

$$(\xi f)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\varphi_t(p)) - f(p)}{t} \quad (f \in C^\infty(M))$$

により M 上のベクトル場 ξ が誘導され，

$$L_\xi \alpha = \lim_{t \to 0} \frac{{\varphi_t}^* \alpha - \alpha}{t} \quad (\alpha \in \Omega^k(M))$$

がなりたつ．

5.1.9 マウラー＝カルタン形式

G をリー群とする．$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ に値をとる G 上の 1 次微分形式 ω_{mc} で，$\iota_\xi \omega_{\mathrm{mc}} = \xi$ $(\xi \in \mathfrak{g})$ をみたすものを，G の **マウラー＝カルタン形式** という．

$g \in G$ に対し，${L_g}^* \omega_{\mathrm{mc}} = \omega_{\mathrm{mc}}$, ${R_g}^* \omega_{\mathrm{mc}} = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega_{\mathrm{mc}})$.

$\pi_1, \pi_2, \mu : G \times G \to G$ を $\pi_1(g, h) = g$, $\pi_2(g, h) = h$, $\mu(g, h) = gh$ で定義すると，

$$\mu^* \omega_{\mathrm{mc}} = {L_g}^* {\pi_2}^* \omega_{\mathrm{mc}} + {R_h}^* {\pi_1}^* \omega_{\mathrm{mc}} = {\pi_2}^* \omega_{\mathrm{mc}} + \mathrm{Ad}_{h^{-1}}({\pi_1}^* \omega_{\mathrm{mc}}). \quad (5.1)$$

$\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ に対し，$\iota_\eta L_\xi \omega_{\mathrm{mc}} = L_\xi(\iota_\eta \omega_{\mathrm{mc}}) - \iota_{[\xi, \eta]} \omega_{\mathrm{mc}} = -[\xi, \eta]$. よって $L_\xi \omega_{\mathrm{mc}} = -[\xi, \omega_{\mathrm{mc}}]$. 対称双線型写像

$$[\ ,\ ] : (\Omega^1(G) \otimes \mathfrak{g}) \times (\Omega^1(G) \otimes \mathfrak{g}) \to \Omega^2(G) \otimes \mathfrak{g},$$

を $[\alpha \otimes \xi, \beta \otimes \eta] = (\alpha \wedge \beta) \otimes [\xi, \eta]$ で定義すると，

$$L_\xi \omega_{\mathrm{mc}} = (\mathrm{d}\iota_\xi + \iota_\xi \mathrm{d}) \omega_{\mathrm{mc}} = \iota_\xi \mathrm{d}\omega_{\mathrm{mc}}, \quad [\xi, \omega_{\mathrm{mc}}] = \frac{1}{2} \iota_\xi [\omega_{\mathrm{mc}}, \omega_{\mathrm{mc}}]$$

より，**構造方程式**

$$\mathrm{d}\omega_{\mathrm{mc}} + \frac{1}{2}[\omega_{\mathrm{mc}}, \omega_{\mathrm{mc}}] = 0$$

がなりたつ．

線型リー群 $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の Lie 代数を $\mathfrak{g} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ とする．G の一般の元を表す記号 g を G 上の $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 値関数と見ると，$X \in \mathfrak{g}$ に対し，

$$\iota_X(g^{-1}\mathrm{d}g) = g^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g \exp(tX)) \bigg|_{t=0} = X.$$

よって $\omega_{\mathrm{mc}} = g^{-1}\mathrm{d}g$ と書ける．この場合，(5.1) は

$$(gh)^{-1}\mathrm{d}(gh) = h^{-1}\mathrm{d}h + g^{-1}(h^{-1}\mathrm{d}h)g$$

によって，構造方程式は

$$\mathrm{d}(g^{-1}\mathrm{d}g) = \mathrm{d}g^{-1} \wedge \mathrm{d}g = -g^{-1}\mathrm{d}g \wedge g^{-1}\mathrm{d}g$$

によって確かめることもできる．

5.2 ベクトル束の接続

5.2.1 共変微分・接続，平坦性，平行移動

$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする．多様体 M 上のランク n の K ベクトル束 $\pi : E \to M$ に対し，$\mathcal{E}nd(E) = \bigsqcup_{p \in M} \mathrm{End}(E_p)$ は自然な K ベクトル束の構造をもつ．

K 線型写像 $\nabla : \Gamma(M, E) \to \Omega^1(M, E)$ で

$$\nabla(fs) = \mathrm{d}f \otimes s + f\nabla s \quad (f \in C^\infty(M),\ s \in \Gamma(M, E))$$

をみたすものを，**共変微分** または **接続** という．M 上のベクトル場 ξ に対し，$\nabla_\xi = \iota_\xi \nabla$ と書く．2 つの接続の差はベクトル空間 $\Omega^1(M, \mathcal{E}nd(E))$ の元であり，接続全体の集合は $\Omega^1(M, \mathcal{E}nd(E))$ 上のアフィン空間になる．

$\nabla s = 0$ である切断 s を，共変定数，平行な切断という．平坦な切断とよばれることもある．

M の開被覆 $\{U_\alpha\}$，および $E|U_\alpha$ の平行な切断 $s_{\alpha,1}, \ldots, s_{\alpha,n}$ が存在して，各点上のファイバーの基底を与えるとき，接続 ∇ は **平坦** であるという．このとき，$s = \sum_{i=1}^{n} f_{\alpha,i} s_{\alpha,i} \in \Gamma(U_\alpha, E|U_\alpha)$ $(f_{\alpha,i} \in C^\infty(U_\alpha))$ に対し，$\nabla s = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{d}f_{\alpha,i}) \otimes s_{\alpha,i}$.

C^∞ 写像 $\gamma : [0, 1] \to M$ と $u \in E_{\gamma(0)}$ に対し，接続 $s^{-1}\nabla$ について平行な切断 $s_u \in \Gamma([0, 1], \gamma^{-1}E)$ で $s(\gamma(0)) = u$ をみたすものが一意的に存在する．さらに線型同型 $\widetilde{\gamma} : E_0 \to E_1$ が $\widetilde{\gamma}(u) = s_u(1)$ によって定まる．これを，接続 ∇ に関する道 γ に沿った **平行移動** という．

平坦な接続の場合，平行移動は γ のホモトピー類のみで決まる．これにより，M の基本亜群から，E のファイバーを対象とし，線型同型を射とする亜群への関手が得られる．

5.2.2 共変外微分，曲率

多様体 M 上のベクトル束 $\pi : E \to M$ に対し，線型写像 $\mathrm{d}^\nabla : \Omega^k(M, E) \to \Omega^{k+1}(M, E)$ で，$s \in \Omega^0(M, E)$ に対し $\mathrm{d}^\nabla s = \nabla s$ であって，

$$\mathrm{d}^{\nabla}(\alpha\wedge\sigma)=(\mathrm{d}\alpha)\wedge\sigma+(-1)^p\alpha\wedge\mathrm{d}^{\nabla}\sigma,\ \alpha\in\Omega^p(M),\ \sigma\in\Omega^q(M,E)$$

をみたすものが定まる．これを **共変外微分** という．さらに，線型写像 $\mathrm{d}^{\nabla}_{\mathcal{E}nd}:\Omega^k(M,\mathcal{E}nd(E))\to\Omega^{k+1}(M,\mathcal{E}nd(E))$ で，$\Phi\in\Omega^p(M,\mathcal{E}nd(E))$, $\sigma\in\Omega^q(M,E)$, $\Phi\wedge\sigma\in\Omega^{p+q}(M,E)$ に対し，

$$\mathrm{d}^{\nabla}(\Phi\wedge\sigma)=(\mathrm{d}^{\nabla}_{\mathcal{E}nd}\Phi)\wedge\sigma+(-1)^p\Phi\wedge\mathrm{d}^{\nabla}\sigma$$

をみたすものも定まる．

接続 ∇ に対し，$F(\nabla)\in\Omega^2(M,\mathcal{E}nd(E))$ が一意的に存在して，

$$\mathrm{d}^{\nabla}(\mathrm{d}^{\nabla}\sigma)=F(\nabla)\wedge\sigma\quad(\sigma\in\Omega^k(M,E))$$

がなりたつ．$F(\nabla)$ を ∇ の **曲率** という．結合則 $\mathrm{d}^{\nabla}(\mathrm{d}^{\nabla}\mathrm{d}^{\nabla})=(\mathrm{d}^{\nabla}\mathrm{d}^{\nabla})\mathrm{d}^{\nabla}$ より，$\mathrm{d}^{\nabla}_{\mathcal{E}nd}F(\nabla)=0$ が従う（ビアンキ恒等式）．フロベニウスの定理より，曲率が消えることは切断が平坦であることと同値である．

5.2.3 局所的記述

$K=\mathbb{R},\mathbb{C}$ とする．多様体 M 上のランク n の K ベクトル束 $\pi:E\to M$ に対し，M の開被覆 $\{U_\alpha\}$，および $E|U_\alpha$ の切断 $s_{\alpha,1},\dots,s_{\alpha,n}$ で U_α の各点上のファイバーの基底を与えるものを取る．

$$\nabla s_{\alpha,j}=\sum_{i=1}^n A_{\alpha,ij}\otimes s_{\alpha,i},\quad A_\alpha=A_\alpha^{\nabla}=(A_{\alpha.ij})\in\Omega^1(U_\alpha)\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{M}_n(K)$$

とおくと，$s=\sum_{i=1}^n f_{\alpha,i}s_{\alpha,i}\in\Gamma(U_\alpha,E|U_\alpha)$, $(f_{\alpha,i}\in C^\infty(U_\alpha))$ に対し，

$$\nabla s=\sum_{i=1}^n(\mathrm{d}f_{\alpha,i}+\sum_{j=1}^r A_{\alpha,ij}f_{\alpha,j})\otimes s_{\alpha,i}.$$

$U_{\alpha\beta}$ 上で

$$s_{\beta,j}=\sum_{i=1}^n g_{\alpha\beta,ij}s_{\alpha,i},\quad g_{\alpha\beta}=(g_{\alpha\beta,ij}):U_{\alpha\beta}\to\mathrm{GL}_n(K)$$

とすると，$s=\sum_{i=1}^n f_{\alpha,i}s_{\alpha,i}=\sum_{j=1}^n f_{\beta,j}s_{\beta,j}$ に対し，$f_{\alpha,i}=\sum_{j=1}^n g_{\alpha\beta,ij}f_{\beta,j}$ と書ける．また，

$$\nabla s_{\beta,j}=\sum_{k=1}^n A_{\beta,kj}\otimes s_{\beta,k}=\sum_{i,k}A_{\beta,kj}g_{\alpha\beta,ik}\otimes s_{\alpha,i},$$

$$\nabla s_{\beta,j}=\sum_{i=1}^n \mathrm{d}g_{\alpha\beta,ij}\otimes s_{\alpha,i}+\sum_{i,k}g_{\alpha\beta,kj}A_{\alpha,ik}\otimes s_{\alpha,i}$$

より，$A_\beta={g_{\alpha\beta}}^{-1}\mathrm{d}g_{\alpha\beta}+{g_{\alpha\beta}}^{-1}A_\alpha g_{\alpha\beta}$.

曲率を U_α 上で

$$F(\nabla)s_{\alpha,j}=\sum_{i=1}^n F_{\alpha,ij}s_{\alpha,i},\quad F_\alpha=F_\alpha^\nabla=(F_{\alpha,ij})\in\Omega^2(U_\alpha)\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{M}_n(K)$$

と表すと,

$$\begin{aligned}F(\nabla)s_{\alpha,j}&=\mathrm{d}^\nabla(\nabla s_{\alpha,j})=\mathrm{d}^\nabla\left(\sum_{k=1}^n A_{\alpha,kj}\otimes s_{\alpha,k}\right)\\&=\sum_{k=1}^n(\mathrm{d}A_{\alpha,kj}\otimes s_{\alpha,k}-A_{\alpha,kj}\wedge\nabla s_{\alpha,k})\\&=\sum_{i=1}^n(\mathrm{d}A_{\alpha,ij}-\sum_{k=1}^n A_{\alpha,kj}\wedge A_{\alpha,ik})\otimes s_{\alpha,i}.\end{aligned}$$

よって, $F_\alpha=\mathrm{d}A_\alpha+A_\alpha\wedge A_\alpha$. ビアンキ恒等式は $\mathrm{d}F_\alpha+[A_\alpha,F_\alpha]=0$ と書け, よって $\mathrm{d}({F_\alpha}^k)+[A_\alpha,{F_\alpha}^k]=0$. さらに, $A_\beta={g_{\alpha\beta}}^{-1}\mathrm{d}g_{\alpha\beta}+{g_{\alpha\beta}}^{-1}A_\alpha g_{\alpha\beta}$ より, $F_\beta={g_{\alpha\beta}}^{-1}F_\alpha g_{\alpha\beta}$.

ここで $a\in\Omega^1(M,\mathcal{E}nd(E))$ に対し,

$$a(s_{\alpha,j})=\sum_{i=1}^n a_{\alpha,ij}s_{\alpha,i},\quad a_\alpha=(a_{\alpha,ij})\in\Omega^1(M)\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{M}_n(K)$$

とすると, $a_\beta={g_{\alpha\beta}}^{-1}a_\alpha g_{\alpha\beta}$, $A_\alpha^{\nabla+a}=A_\alpha^\nabla+a_\alpha$ であり,

$$F_\alpha^{\nabla+a}=F_\alpha^\nabla+\mathrm{d}a_\alpha+A_\alpha^\nabla\wedge a_\alpha+a_\alpha\wedge A_\alpha^\nabla+a_\alpha\wedge a_\alpha.$$

5.3 主束と接続

5.3.1 主束

リー群 G が多様体 P に右から自由に作用し, 商集合への射影 $\pi:P\to M$ が多様体 M 上のファイバー束であるとき, P を M 上の G **主束** という.

右作用 $\mu:P\times G\to P$, $\mu(p,g)=R_g(p)=pg$ の微分 $\mu_*:\mathfrak{g}\to\Gamma(P,TP)$ を $\mu_*(\xi)=\mathrm{d}\mu(0,\xi)$ で定義する. $-\mu_*$ がリー環の準同型になる.

M 上の G 主束 P_1,P_2 に対し, G 同変 C^∞ 写像 $P_1\to P_2$ を G 主束の同型といい, 同型が存在するとき P_1,P_2 はたがいに同型であるという.

第 1 成分への射影 $M\times G\to M$ は G 主束になる. これと同型な主束を自明な主束という. G 主束 $\pi:P\to M$ の切断 $s:M\to P$, $\pi s=\mathrm{id}_M$ は G 主束の同型 $M\times G\to P$, $(p,g)\mapsto s(p)g$ を誘導する. 主束の切断が存在することと主束が自明であることは同値である.

G 主束 $P\to M$ と C^∞ 写像 $\varphi:M'\to M$ に対し, ファイバー積 $\varphi^*P=M'\times_M P$ を φ による P のひきもどしという. このとき第 2 成分への射影が G 同変写像 $\varphi^*P\to P$ を誘導する.

G 主束 $\pi : P \to M$ の局所自明化 $\{(U_\alpha,\, \varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G)\}$ から定まる写像 $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to G$ で

$$(p,\, g_{\alpha\beta}(p)u) = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(p,\, u) \quad (p \in U_{\alpha\beta},\, u \in G)$$

をみたすものを，P の **変換関数** という．これはコサイクル条件 $g_{\alpha\alpha} = \mathbf{1}$, $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ をみたす．逆に，M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と C^∞ 写像の族 $\{g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to G\}$ が与えられ，コサイクル条件をみたすとき，$\{g_{\alpha\beta}\}$ を変換関数とする G 主束が構成できる．

5.3.2 主束に付随するファイバー束

G 多様体 F に対し，$P \times_G M = (P \times F)/G$ は M 上のファイバー束で，ファイバーは F と微分同相である．これを F に付随するファイバー束という．

$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする．K ベクトル空間 V への G の表現 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ が与えられているとき，$E = P \times_G V = (P \times V)/G$ は M 上の K ベクトル束である．これを ρ に付随するベクトル束という．また逆に，G は E の **構造群** であるという．V に値をとる P 上の微分形式 $\omega \in \Omega^k(P) \otimes V$ に対し，条件

$$R_g{}^*\omega = \rho(g^{-1})(\omega), \quad \iota_{\mu_*\xi}\omega = 0 \quad (g \in G,\, \xi \in \mathfrak{g})$$

は，$\pi_1 : P \times G \to P$, $\pi_1(p,\, g) = p$ とすると，$\mu^*\omega = \rho(g^{-1})(\pi_1{}^*\omega)$ と同値である．この条件をみたすもの全体のなす K ベクトル空間を $\Omega^k_G(P, V)$ と書くと，$\pi^* : \Omega^k(M,\, E) \to \Omega^k_G(P, V)$ は同型である．特に，$\Gamma(M,\, E)$ は $C^\infty(P) \otimes V$ の G 不変部分空間 $(C^\infty(P) \otimes V)^G$ に同型である．

随伴表現 $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ に付随するベクトル束を $\mathfrak{g}_P$ と書く．リー括弧により $C^\infty(M)$ 上の双線型写像

$$[\ ,\ ] : \Omega^k(M,\, \mathfrak{g}_P) \times \Omega^m(M,\, \mathfrak{g}_P) \to \Omega^{k+m}(M,\, \mathfrak{g}_P)$$

が誘導され，

$$[\beta,\, \alpha] = -(-1)^{km}[\alpha,\, \beta] \quad (\alpha \in \Omega^k(M,\, \mathfrak{g}_P),\ \beta \in \Omega^m(M,\, \mathfrak{g}_P))$$

をみたす．

5.3.3 計量ベクトル束と主束

$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする．階数 n の K ベクトル束 $E \to M$ に対し，$\mathrm{GL}_n(K)$ 主束 $P_{\mathrm{GL}}(E)$ を，$p \in M$ 上のファイバーが，E_p の基底をなすベクトルの組 $(u_1,\, \ldots,\, u_n)$ 全体の集合となるように定義できる．これを E の枠束とよび，その局所的切断を枠とよぶ．このとき E は主束 $P_{\mathrm{GL}}(E)$ と $\mathrm{GL}_n(K)$ の標準的な K 上の n 次元表現に付随するベクトル束である．

$K = \mathbb{R}$ のとき，各ファイバー E_p 上の内積の族 $g = \{g_p\}_{p \in M}$ で，

$g_p(u, u)$, $u \in E_p$ が E 上の C^∞ 関数となるものが定義されているとき，(E, g) を計量ベクトル束という．これに対し，$\mathrm{O}(n)$ 主束 $P_{\mathrm{O}}(E)$ を，$p \in M$ 上のファイバーが，E_p の正規直交基底をなすベクトルの組 $(u_1, \ldots, u_n)$ 全体の集合となるように定義できる．これを E の $\mathrm{O}(n)$ 枠束とよび，その局所的切断を直交枠とよぶ．さらに E が有向ベクトル束であるとき，$\mathrm{SO}(n)$ 主束 $P_{\mathrm{SO}}(E)$ を，$p \in M$ 上のファイバーが，E_p の正規直交基底をなすベクトルの組 $(u_1, \ldots, u_n)$ で E_p の向きに適合するもの全体の集合となるように定義できる．これを E の $\mathrm{SO}(n)$ 枠束とよぶ．このとき E は主束 $P_{\mathrm{O}}(E)\,[P_{\mathrm{SO}}(E)]$ と $\mathrm{O}(n)\,[\mathrm{SO}(n)]$ の標準的な n 次元実表現に付随するベクトル束である．

$K = \mathbb{C}$ のとき，各ファイバー E_p 上のエルミート内積の族 $h = \{h_p\}_{p \in M}$ で，$h_p(u, u)$, $u \in E_p$ が E 上の C^∞ 関数となるものが定義されているとき，(E, h) をエルミート・ベクトル束という．これに対し，$\mathrm{U}(n)$ 主束 $P_{\mathrm{U}}(E)$ を，$p \in M$ 上のファイバーが, E_p の正規直交基底をなすベクトルの組 $(u_1, \ldots, u_n)$ 全体の集合となるように定義できる．これを E の $\mathrm{U}(n)$ 枠束とよび，その局所的切断をユニタリ枠とよぶ．このとき E は主束 $P_{\mathrm{U}}(E)$ と $U(n)$ の標準的な $\mathbb{C}$ 上の n 次元表現に付随するベクトル束である．

5.3.4 自明な主束上の接続形式とゲージ変換

リー群 G と多様体 M 上の $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ 値 1 次微分形式 A に対し, $P = M \times G$ 上の $\mathfrak{g}$ 値 1 次微分形式 $\theta = \omega_{\mathrm{mc}} + \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(A)$ $(g \in G)$ を P 上の **接続形式** という．G が線型リー群であるときは，$\theta = g^{-1}\mathrm{d}g + g^{-1}Ag$ と書ける．

$\pi_1, \mu : P \times G \to P$, $\pi_2 : P \times G \to G$ を

$$\pi_1(x, g, h) = (x, g), \quad \pi_2(x, g, h) = h, \quad \mu(x, g, h) = (x, gh)$$

で定義すると，

$$\mu^*\theta = {\pi_2}^*\omega_{\mathrm{mc}} + \mathrm{Ad}_{h^{-1}}({\pi_1}^*\theta). \tag{5.2}$$

逆に，(5.2) をみたす P 上の $\mathfrak{g}$ 値 1 次微分形式 θ は，M 上の $\mathfrak{g}$ 値 1 次微分形式 A によって $\theta = \omega_{\mathrm{mc}} + \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(A)$ と書ける．

C^∞ 写像 $u : M \to G$ に対し，$\widetilde{u} : P \to P$, $\widetilde{u}(x, g) = (x, u(x)g)$ とすると，

$$\widetilde{u}^*\theta = \omega_{\mathrm{mc}} + \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(u^*\omega_{\mathrm{mc}} + \mathrm{Ad}_{u^{-1}}(A))$$

も P 上の接続形式である．$u^*\omega_{\mathrm{mc}} + \mathrm{Ad}_{u^{-1}}(A)$ を u による A の **ゲージ変換** という．G が線型リー群であるときは,

$$\widetilde{u}^*\theta = (ug)^{-1}\mathrm{d}(ug) + (ug)^{-1}A(ug) = g^{-1}\mathrm{d}g + g^{-1}(u^{-1}\mathrm{d}u + u^{-1}Au)g.$$

u による A のゲージ変換は $u^{-1}\mathrm{d}u + u^{-1}Au$ である．

5.3.5 主束の接続

多様体 M 上のファイバー束 $\pi : E = \bigsqcup_{x \in M} E_x \to M$ に対し，E の接ベクトル束 $TE = \bigsqcup_{p \in E} T_p E$ の部分ベクトル束 $T^{\mathrm{fib}} E = \bigsqcup_{p \in E} T_p(E_{\pi(p)})$ を，鉛直接ベクトル束とよぶ．そして, TE の部分ベクトル束 H で, H_p が $T_p(E_{\pi(p)})$ の補空間であるものを，水平接ベクトル束という．

G をリー群とする．多様体 M 上の G 主束 $\pi : P \to M$ に対し，右 G 同変な水平接ベクトル束を，P 上の **接続** という．積ベクトル束 $P \times \mathfrak{g} \to P$ 上の右 G 同変ベクトル束の構造を,

$$(p, x) \cdot g = (pg, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(x)) \quad (g \in G, p \in P, x \in \mathfrak{g})$$

で定義する．右作用 $\mu : P \times G \to P$ の誘導する写像 $P \times \mathfrak{g} \to TP \to TP/H$ は，右 G 同変ベクトル束の同型になる．この同型によって射影 $TP \to TP/H$ を $\mathfrak{g}$ に値をとる微分形式と見たもの $\theta \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$ を，H の **接続形式** という．これは条件

$$R_g{}^*(\theta) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\theta), \quad \theta(\mu_* \xi) = \xi \quad (g \in G, \xi \in \mathfrak{g})$$

をみたす．これは $\pi_2 : P \times G \to G, \pi_2(p, g) = g$ とすると

$$\mu^* \theta = \pi_2{}^* \omega_{\mathrm{mc}} + \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\pi_1{}^* \theta) \tag{5.3}$$

と同値である．逆にこの条件をみたす $\theta \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$ は接続 $H \subset TP$ と 1 対 1 に対応する．両者を平等に扱いたいので，接続を A で表し，対応する TP の部分ベクトル束を H_A，接続形式を θ_A と書くことにしよう．

P 上の接続全体の集合 $\mathcal{A}_P$ は，ベクトル空間 $\Omega^1_G(P, \mathfrak{g}) \cong \Omega^1(M, \mathfrak{g}_P)$ 上のアフィン空間になる．

5.3.6 ゲージ変換

G 主束 $\pi : P \to M$ に対し，G 同変微分同相 $\widetilde{u} : P \to P$ で $\pi \circ u = \pi$ をみたすものを，P 上の **ゲージ変換** という．ゲージ変換 $\widetilde{u} : P \to P$ は，写像 $u' : P \to G$ で $u'(pg) = g^{-1} u'(p) g$ をみたすものと，$\varphi(p) = pu'(p)^{-1}$ によって 1 対 1 に対応する．G の $P \times G$ への作用 $g \cdot (p, h) = (pg^{-1}, ghg^{-1})$ による商 $P \times_{\mathrm{Ad}} G$ は，G をファイバーとする M 上のファイバー束である．その切断は P 上のゲージ変換と 1 対 1 に対応する．

ゲージ変換全体のなす群 $\mathcal{G}_P$ は $\theta \mapsto u^* \theta$ により $\Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$ に作用し，接続全体の空間 $\mathcal{A}_P \subset \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$ はこの作用について閉じている．すなわち $\mathcal{G}_P$ は $\mathcal{A}_P$ に作用する．この作用を $A \mapsto u^* A$ と書き，商集合を $\mathcal{B}_P = \mathcal{A}_P / \mathcal{G}_P$ と書く．

5.3.7　可積分接続と曲率

G 主束 $\pi : P \to M$ の接続 A が可積分（$H_A \subset TP$ が可積分ということ）ならば，M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ と G 主束の同型の族 $u_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ が存在して，$\theta_A|\pi^{-1}(U_\alpha) = u_\alpha^*\omega_{\mathrm{mc}}$ となる．すなわち，接続形式は局所的にマウラー＝カルタン形式の引きもどしとして書ける．逆に局所的にマウラー＝カルタン形式の引きもどしならば可積分である．

主束 $\pi : P \to M$ 上の接続 A に対し，$\mathfrak{g}$ に値をとる 2 次微分形式 $\Omega_A = \mathrm{d}\theta_A + \dfrac{1}{2}[\theta_A, \theta_A]$ を A の **曲率形式** とよぶ．これは $\mu^*\Omega_A = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}({\pi_1}^*\Omega_A)$ をみたすので，$F_A \in \Omega^2(M, \mathfrak{g}_P)$ が一意的に存在して $\Omega_A = \pi^*F_A$ と書ける．F_A を接続 A の **曲率** という．ゲージ変換 $u : P \to P$ に対し，$F_{u^*A} = \mathrm{Ad}_{u^{-1}}(F_A)$ である．

フロベニウスの定理より，曲率が消えることは主束の接続 $H_A \subset TP$ が可積分であることに同値である．

5.3.8　共変微分

$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする．K ベクトル空間 V 上の G の表現 $G \to \mathrm{GL}(V)$ に付随する M 上のベクトル束 $E = P \times_G V$ に対し，共変微分 $\nabla^A : \Gamma(M, E) \to \Omega^1(M, E)$ を，同型

$$\pi^* : \Gamma(M, E) \to \Omega^0_G(P, V), \quad \pi^* : \Omega^1(M, E) \to \Omega^1_G(P, V)$$

を用いて $\pi^*\nabla^A s = (\mathrm{d} + \theta_A)(\pi^* s)$ で定義する．

ゲージ変換 $u : P \to P$ は $C^\infty(M)$ 上の準同型 $u : \Omega^k(M, E) \to \Omega^k(M, E)$ を誘導する．接続 A の誘導する共変微分を $\nabla^A : \Gamma(M, E) \to \Omega^1(M, E)$ とすると，$\nabla^{u^*A} = u^{-1} \circ \nabla^A \circ u$ である．

∇^A の曲率 $F(\nabla^A)$ は，表現の誘導する写像 $\Omega^2(M, \mathfrak{g}_P) \to \Omega^2(M, \mathcal{E}nd(E))$ による A の曲率 F_A の像に一致し，

$$F(\nabla^{u^*A}) = F(u^{-1} \circ \nabla^A \circ u) = \mathrm{Ad}_{u^{-1}}(F(\nabla^A)).$$

また，共変外微分作用素 $\mathrm{d}_A : \Omega^q(M, \mathfrak{g}_P) \to \Omega^{q+1}(M, \mathfrak{g}_P)$ が定義され，$\mathrm{d}_A\mathrm{d}_A = F_A \wedge -$ およびビアンキ恒等式 $\mathrm{d}_A F_A = 0$ がなりたつ．

5.3.9　水平なもちあげ

G 主束 $\pi : P \to M$ とその上の接続 A を考える．点 $p \in P$ と $x = \pi(p)$ における M の接ベクトル ξ_x に対し，$(\xi^{\mathrm{h}})_p \in (H_A)_p$ で $\mathrm{d}\pi_p((\xi^{\mathrm{h}})_p) = \xi_x$ をみたすものが一意的に定まる．これを ξ_x の **水平なもちあげ** という．接続形式 θ_A を用いると，$(\xi^{\mathrm{h}})_p \in (H_A)_p$ は $(\theta_A)_p((\xi^{\mathrm{h}})_p) = 0$ ということである．水平なもちあげはベクトル場 $x \mapsto \xi_x$ に対しても同様に定義されるが，リー環の準同型にはならず，その破れを表すのが曲率である．

定理 5.3.1 M 上のベクトル場 ξ, η に対し，

$$[\xi^{\mathrm{h}}, \eta^{\mathrm{h}}] - [\xi, \eta]^{\mathrm{h}} = -\mu_* F_A(\xi, \eta).$$

証明 左辺はファイバー方向のベクトル場なので，$\theta_A([\xi^{\mathrm{h}}, \eta^{\mathrm{h}}]) = -F_A(\xi, \eta)$ を示せばよい．これは (3.1) を用いて確かめられる． □

5.3.10 SO(N) 主束のリーマン幾何

$G = \mathrm{SO}(N)$ のリー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(N)$ 上の G 不変内積 $\langle X, Y\rangle = -c\,\mathrm{tr}(XY)$ を取る．リーマン多様体 (M, g) 上の G 主束 $\pi : P \to M$ とその接続 A に対し，P 上のリーマン計量 g^P を，鉛直接ベクトル束と水平接ベクトル束が直交するように，そして前者では $\mathfrak{g}$ の不変内積から，後者では M のリーマン計量 g から誘導される計量になるように定める．g^P のレビチビタ接続を ∇ とする．(M, g) のレビチビタ接続も ∇ と書く．$T_X \in \mathrm{End}(T_{\pi(p)}M)$ を $g(T_X(\xi), \eta) = \langle F_A(\xi, \eta), X\rangle$ $(\xi, \eta \in T_{\pi(p)}M)$ によって定めると，次が確かめられる．

定理 5.3.2 (1) $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対し，$\nabla_X Y = \dfrac{1}{2}[X, Y]$.
(2) M 上のベクトル場 ξ, η に対し，$\nabla_{\xi^{\mathrm{h}}}\eta^{\mathrm{h}} = (\nabla_\xi \eta)^{\mathrm{h}} + \dfrac{1}{2}F_A(\xi, \eta)$.
(3) $X \in \mathfrak{g}$ と M 上のベクトル場 ξ に対し，$\nabla_X \xi^{\mathrm{h}} = \nabla_{\xi^{\mathrm{h}}} X = \dfrac{1}{2}T_X(\xi)^{\mathrm{h}}$.

点 $p \in P$ における指数写像 $\exp_p^\nabla : T_pP \to P$ を考える．$T_pP = (H_A)_p \times \mathfrak{g} = T_{\pi(p)}M \times \mathfrak{g}$ のように同一視する．$0_p \in (H_A)_p$ をゼロベクトル，$X \in \mathfrak{g}$ とすると，定理 5.1.2 より，$\exp_p^\nabla(0_p, X) = p\exp(X)$ である．$(0_p, X) \in T_pP$ における $\exp_p^\nabla$ の微分

$$\mathrm{d}(\exp^\nabla)_{(0_p, X)} : T_{(0_p, X)}(T_pP) \to T_{p\exp(X)}P$$

に対し，$T_{(0_p, X)}T_pP = T_{\pi(p)}M \times \mathfrak{g}$, $T_{p\exp(X)}P = T_{\pi(p)}M \times \mathfrak{g}$ のように同一視すると，写像

$$\begin{bmatrix} J_X^M & 0 \\ 0 & J_X^{\mathfrak{g}} \end{bmatrix} : T_{\pi(p)}M \times \mathfrak{g} \to T_{\pi(p)}M \times \mathfrak{g}$$

が得られる．定理 5.1.1, 5.1.2 より，$J_X^{\mathfrak{g}}(Y) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-X}}{X}Y$ である．J_X^M の方は，A の曲率や $M, \mathfrak{g}$ の計量が効いている繊細な量になる．

定理 5.3.3 $J_X^M(\xi) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-T_X}}{T_X}\xi$.

証明 $\gamma(s, t) = \exp_p^\nabla(s(X + t\xi))$, $\Xi(s) = \partial_t\gamma(s, t)|_{t=0}$ とおくと，$J_X^M(\xi) = \Xi(1)$ である．ヤコビ場の方程式 (4.4) より，

$$(\nabla_{\partial_s})^2\Xi + R^\nabla(\Xi, X)X = 0.$$

初期条件は $\Xi(0)=0,\ \nabla_{\partial_s}\Xi(s)|_{s=0}=\xi$. 定理 5.3.2 より,

$$R^{\nabla}(\Xi,\,X)\,X=-\nabla_X\nabla_{\xi^{\mathrm{h}}}X=-\frac{1}{2}\nabla_X T_X(\Xi)^{\mathrm{h}}=-\left(\frac{1}{2}T_X\right)^2(\Xi)^{\mathrm{h}}.$$

$\nabla_{\partial_s}=\partial_s+\dfrac{1}{2}T_X$ より, $\left[\left(\partial_s+\dfrac{1}{2}T_X\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}T_X\right)^2\right]\Xi=0.$
$\dfrac{1-\mathrm{e}^{-sT_X}}{T_X}\,\xi$ も同じ微分方程式·初期条件をみたすので, $\Xi(s)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-sT_X}}{T_X}\,\xi.$
$s=1$ とおくと定理が言える. □

G が一般のコンパクト・リー群である場合, $G\subset\mathrm{SO}(N)$ と見ることができるので, 同様の定理がなりたつ.

5.4 チャーン=ヴェイユ理論

5.4.1 複素直線束の第 1 チャーン形式

2 次元球面 S^2 上の相異なる 2 点 $p_0, p_\infty\in S^2$ に対し, $U_0=S^2\setminus\{p_\infty\}$, $U_\infty=S^2\setminus\{p_0\}$ とし, p_0 を $(0,\,0)$ に対応させる局所座標系で全射であるもの $\varphi_0:U_0\to\mathbb{R}^2$ を取る. さらに変換関数 $u=u_{\infty0}:U_0\cap U_\infty\to\mathbb{C}^\times$ で与えられる複素直線束 $\pi:L\to S^2$ を考える. L の切断は, $s_0:U_0\to\mathbb{C}$, $s_\infty:U_\infty\to\mathbb{C}$ で, $U_0\cap U_\infty$ 上 $s_\infty=us_0$ であるものと 1 対 1 に対応する.

同じ変換関数によって定義される $\mathbb{C}^\times$ 主束上の接続 A が, 局所自明化により, $A_0\in\Omega^1(U_0)\otimes\mathbb{C}$, $A_\infty\in\Omega^1(U_\infty)\otimes\mathbb{C}$ に対応するとすると, $u^{-1}\mathrm{d}u+A_\infty=A_0$ である. $U_0\cap U_\infty$ 上の有向閉曲線 C を, φ_0 に関し $(\cos(\theta),\sin(\theta))$, $\theta:0\to2\pi$ となるものと定義し, $u(\varphi_0^{-1}(\cos(\theta),\sin(\theta)))=\mathrm{e}^{iw(\theta)}$ とおくと, $w(\theta+2\pi)=w(\theta)-2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ である. (こうすると, C 上の切断で $s_0(\varphi_0^{-1}(x,\,y))=(x+iy)^n$ であるものが, L の切断で零点が p_0 のみであるものに延びる.) このとき,

$$\int_{S^2}F_A=\int_{U_0}\mathrm{d}A_0=\int_C A_0-A_\infty=\int_C u^{-1}\mathrm{d}u=-2\pi ni.$$

多様体 M 上の複素直線束 L の変換関数を取り, 同じ変換関数をもつ $\mathbb{C}^\times$ 主束 P 上の接続 A を考える. これに対し, $c_1(A)=\dfrac{i}{2\pi}F_A\in\Omega^2(M)\otimes\mathbb{C}$ を **第 1 チャーン(陳)形式** という. ビアンキ恒等式よりこれは閉形式である. $a\in\Omega^1(M)\otimes\mathbb{C}$ に対し, $F_{A+a}=F_A+\mathrm{d}a$ なので, $c_1(A)$ のドラーム・コホモロジー類 $[c_1(A)]$ は接続 A の取り方によらない. そこで $c_1(L)=[c_1(A)]\in\mathrm{H}^2_{\mathrm{dR}}(M)\otimes\mathbb{C}$ とおき, これを L の **第 1 チャーン類** という.

複素直線束 L 上には 1 の分割によりエルミート内積が存在するので, 変換関数として $\mathrm{U}(1)$ に値をとるものが取れ, A を $\mathrm{U}(1)$ 接続に取ることができる.

このとき $c_1(A)$ は実微分形式になる．したがって，$c_1(L) \in \mathrm{H}^2_{\mathrm{dR}}(M)$.

定理 5.4.1 M が 2 次元コンパクト有向多様体であるとき，$\displaystyle\int_M c_1(A)$ は整数である．

2 次元球面上の複素ベクトル束は第 1 チャーン類によって分類される．

5.4.2 不変多項式と特性類

多様体 M 上のランク n のベクトル束 E に対し，M の開被覆 $\{U_\alpha\}$，および $E|U_\alpha$ の切断 $s_{\alpha,1}, \ldots, s_{\alpha,n}$ で U_α の各点上のファイバーの基底を与えるものを取り，$U_{\alpha\beta}$ 上で

$$s_{\beta,j} = \sum_{i=1}^{n} g_{\alpha\beta,ij} s_{\alpha,i}, \quad g_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta,ij}) : U_{\alpha\beta} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

とする．このとき，接続 ∇ は $A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ で $A_\beta = {g_{\alpha\beta}}^{-1} \mathrm{d} g_{\alpha\beta} + {g_{\alpha\beta}}^{-1} A_\alpha g_{\alpha\beta}$ をみたすものに対応し，曲率 $F(\nabla)$ は

$$F_\alpha = \mathrm{d}A_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha \in \Omega^2(U_\alpha) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

に対応し，$F_\beta = {g_{\alpha\beta}}^{-1} F_\alpha g_{\alpha\beta}$ がなりたつのであった．

n 次複素正方行列全体の集合 $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 上の多項式関数 $\varphi(X)$ で，任意の $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ に対し，$\varphi(gXg^{-1}) = \varphi(X)$ をみたすものを，$\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 上の **不変多項式** とよぶ．$\varphi(F_\beta) = \varphi(F_\alpha)$ なので，これは $\Omega^2(M, \mathbb{C})$ の元を定める．

不変多項式 φ は $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 上の連続関数であり，対角化可能な行列全体は $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ の中で稠密なので，φ は対角行列に対する値で決まる．φ は対角行列の対角成分の置換に対して不変である．こうして $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 上の不変多項式は，複素数係数の n 次対称多項式と 1 対 1 に対応する．

変数 $x_1, \ldots, x_n$ の対称多項式は，$p_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} {x_j}^k$ $(k = 1, \ldots, n)$ の多項式で書ける．したがって，$\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 上の不変多項式 $\varphi(X)$ は，$\mathrm{tr}[X^k]$ $(k = 1, \ldots, n)$ の多項式で書ける．

ビアンキ恒等式より，$\mathrm{d}\,\mathrm{tr}[{F_\alpha}^k] = -\mathrm{tr}\,[A_\alpha, F_\alpha^k] = 0$. よって，不変多項式 φ に対し，ドラーム・コホモロジー類 $[\varphi(F_\alpha)] \in \bigoplus_{k \geq 0} \mathrm{H}^{2k}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{C})$ が定まる．

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{tr}[(F_\alpha^{\nabla + ta})^k]\big|_{t=0} &= k\,\mathrm{tr}[(\mathrm{d}a_\alpha + A^\nabla \wedge a_\alpha + a_\alpha \wedge A_\alpha^\nabla) \wedge (F_\alpha^\nabla)^{k-1}] \\
&= k\,\mathrm{tr}[(\mathrm{d}a_\alpha) \wedge (F_\alpha^\nabla)^{k-1} + a_\alpha \wedge [A_\alpha^\nabla, (F_\alpha^\nabla)^{k-1}]] \\
&= k\,\mathrm{tr}[(\mathrm{d}a_\alpha) \wedge (F_\alpha^\nabla)^{k-1} - a_\alpha \wedge \mathrm{d}(F_\alpha^\nabla)^{k-1}] \\
&= k\,\mathrm{d}\,\mathrm{tr}[a_\alpha \wedge (F_\alpha^\nabla)^{k-1}].
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{tr}[(F_\alpha^{\nabla + ta})^k] = \mathrm{d}\,\mathrm{tr}[a_\alpha \wedge k(F_\alpha^{\nabla + ta})^{k-1}].$$

$$\therefore \quad \mathrm{tr}[(F_\alpha^{\nabla+a})^k] = \mathrm{tr}[(F_\alpha^{\nabla})^k] + \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\left[a_\alpha \wedge \int_0^1 k(F_\alpha^{\nabla+ta})^{k-1}\mathrm{d}t\right].$$

したがって，ドラーム・コホモロジー類 $c_\varphi(E) = [\varphi(F_\alpha)]$ は接続の取り方によらない．これを φ に対するベクトル束 E の **特性類** という．

ここで,

$$\mathrm{CS}_{2k-1}^{\nabla}(a) = \mathrm{tr}\left[a_\alpha \wedge \int_0^1 k(F_\alpha^{\nabla+ta})^{k-1}\mathrm{d}t\right] \in \Omega^{2k-1}(M, \mathbb{C})$$

を **チャーン＝サイモンズ $(2k-1)$ 形式** という．$A_\alpha^{\nabla} = 0$ の場合,

$$\mathrm{CS}_3^{\nabla}(a)|_{U_\alpha} = \mathrm{tr}\left[a_\alpha \wedge \mathrm{d}a_\alpha + \frac{2}{3}\, a_\alpha \wedge a_\alpha \wedge a_\alpha\right].$$

5.4.3 チャーン形式とチャーン類

多様体 M 上の $\mathrm{U}(1)$ 主束 P 上の接続 A に対し，閉 2 形式 $c_1(A) = \dfrac{i}{2\pi}F_A \in \Omega^2(M)$ を **第 1 チャーン形式** という．$a \in \Omega^1(M)\otimes i\mathbb{R}$ に対し, $F_{A+a} = F_A + \mathrm{d}a$ なので，ドラーム・コホモロジー類 $c_1(P) = [c_1(A)] \in \mathrm{H}^2_{\mathrm{dR}}(M)$ は接続 A の取り方によらない．これを P の **第 1 チャーン類** という．

E を n 次単位行列とすると，$X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ に対し，t の多項式 $\det[E + tX]$ の各項の係数は不変多項式である．

多様体 M 上の $\mathrm{U}(n)$ 主束 P 上の接続 A に対し,

$$\det\left[E + \frac{i}{2\pi}F_A\right] = \sum_{j=1}^{n} c_j(A), \quad c_j(A) \in \Omega^{2j}(M)$$

とおき，$c_j(A)$ を **第 j チャーン形式** という．これは閉 $2j$ 形式であり，ドラーム・コホモロジー類 $c_j(P) = [c_j(A)] \in \mathrm{H}^{2j}_{\mathrm{dR}}(M)$ は接続 A の取り方によらない．これを P の **第 j チャーン類** という．

5.5 ヤン＝ミルズ接続と ASD 接続

5.5.1 リー環上の不変内積

体 $\boldsymbol{k}$ 上のリー環 $\mathfrak{g}$ の上の双一次形式 $\langle\,,\,\rangle : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \boldsymbol{k}$ で

$$\langle[\xi, \eta], \zeta\rangle + \langle\eta, [\xi, \zeta]\rangle = 0 \quad (\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{g})$$

をみたすものを $\mathfrak{g}$ 上の不変双一次形式という．これは **結合定数** という物理学において非常に重要な量に対応している．有限次元 $\boldsymbol{k}$ ベクトル空間 V 上の $\mathfrak{g}$ の表現 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ は，$\langle\xi, \eta\rangle = \mathrm{tr}(\rho(\xi)\rho(\eta))$ によって不変双一次形式を誘導する．随伴表現 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ の誘導する不変双一次形式を **キリング形式** という．キリング形式が非退化であるようなリー環を **半単純リー環** という．

リー群 G のリー環 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ 上の双一次形式 $\langle\,,\,\rangle$ が不変双一次形式であることは,

$$\langle \mathrm{Ad}_g(\xi),\, \mathrm{Ad}_g(\eta)\rangle = \langle \xi,\, \eta\rangle \quad (g \in G,\ \xi, \eta \in \mathfrak{g})$$

に同値である.

コンパクト・リー群 G とそのリー環 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ に対し, $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\,,\,\rangle$ で

$$\langle [\xi,\, \eta],\, \zeta\rangle + \langle \eta,\, [\xi,\, \zeta]\rangle = 0 \quad (\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{g})$$

をみたすものが存在する. これを $\mathfrak{g}$ 上の不変内積という. $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\,,\,\rangle$ が不変内積であることは,

$$\langle \mathrm{Ad}_g(\xi),\, \mathrm{Ad}_g(\eta)\rangle = \langle \xi,\, \eta\rangle \quad (g \in G,\ \xi, \eta \in \mathfrak{g})$$

に同値である.

5.5.2 スター作用素

m 次元多様体 M 上のリーマン計量 g は, $q = 1, \ldots, m$ に対し, ベクトル空間 $\bigwedge^q T_p^*M$ $(p \in M)$ 上の内積を誘導する. すなわち, 接ベクトル空間 T_pM の内積 g_p に関する正規直交基底を $e_1, \ldots, e_m$ とすると, 双対基底 $e_1^*, \ldots, e_m^* \in T_p^*M$ が正規直交基底になるような内積が T_p^*M 上に定義され,

$$e_{i(1)}^* \wedge \cdots \wedge e_{i(q)}^* \quad (i(1) < \cdots < i(q))$$

が正規直交基底になるような内積 $(\,,\,)$ が $\bigwedge^q T_p^*M$ 上に定義される.

以下, M は向きづけ可能であるとし, 向きを固定する. $\{1, \ldots, m\}$ 上の置換 σ に対し, 線型写像 $* : \bigwedge^q T_p^*M \to \bigwedge^{m-q} T_p^*M$ を,

$$*(e_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(q)}^*) = \mathrm{sgn}(\sigma)\, e_{\sigma(q+1)}^* \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(m)}^*$$

のように定義する. M 上の q 次 C^∞ 微分形式全体のなす実ベクトル空間を $\Omega^q = \Omega^q(M)$ とする. この上に誘導される線型写像 $* : \Omega^q \to \Omega^{m-q}$ を **スター作用素** とよぶ. $\omega_g = *1 \in \Omega^m$ は体積形式である. $\alpha, \alpha' \in \Omega^q$ に対し, $(\alpha,\, \alpha')\,\omega_g = \alpha \wedge *\alpha'$ である.

M がコンパクトの場合, $\langle \alpha,\, \alpha'\rangle_g = \displaystyle\int_M \alpha \wedge *\alpha'$ によって Ω^q 上に内積が定義される. $\|\alpha\|_{L^2} = \sqrt{\langle \alpha,\, \alpha\rangle_g}$ とする. Ω^q はこのノルムに関して完備ではない.

スター作用素は M 上のベクトル束 E に対し, $* : \Omega^k(M,\, E) \to \Omega^{n-k}(M,\, E)$ を誘導する.

5.5.3 ヤン＝ミルズ接続

G をコンパクト・リー群, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ をそのリー環, $\langle\,,\,\rangle : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ を $\mathfrak{g}$

上の不変内積とする．(M, g) を向きづけられた n 次元コンパクト・リーマン多様体，$\pi : P \to M$ を G 主束とする．P 上の接続 A の曲率 $F_A \in \Omega^2(M, \mathfrak{g}_P)$ に対し，$F_A \wedge *F_A \in \Omega^n(M, \mathrm{Sym}^2(\mathfrak{g}_P))$ と不変内積 $\langle \ \ \rangle : \mathrm{Sym}^2(\mathfrak{g}_P) \to \mathbb{R}$ により $\langle F_A \wedge *F_A \rangle \in \Omega^n(M)$ を得る．ゲージ変換 $u : P \to P$ に対し，$\langle F_{u^*A} \wedge *F_{u^*A} \rangle = \langle F_A \wedge *F_A \rangle$ である．

これを M 上で積分して得られる $\mathcal{A}_P$ 上の関数

$$\mathcal{YM}(A) = \frac{1}{2} \int_M \langle F_A \wedge *F_A \rangle \in [0, \infty)$$

を **ヤン（楊）＝ミルズ汎関数** という．ゲージ変換 u に対し，$\mathcal{YM}(u^*A) = \mathcal{YM}(A)$ なので，$\mathcal{YM}$ は $\mathcal{A}_P/\mathcal{G}_P$ 上の非負実数値関数を与える．

ヤン＝ミルズ汎関数の臨界点を調べてみよう．$a \in \Omega^1(M, \mathfrak{g}_P)$ に対し，

$$\begin{aligned} F_{A+a} &= F_A + \mathrm{d}_A a + \frac{1}{2}[a, a], \\ \mathcal{YM}(A + \varepsilon a) &= \mathcal{YM}(A) + \varepsilon \int_M \langle \mathrm{d}_A a \wedge *F_A \rangle \mod \varepsilon^2 \\ &= \mathcal{YM}(A) - \varepsilon \int_M \langle a \wedge \mathrm{d}_A * F_A \rangle \mod \varepsilon^2 \\ &= \mathcal{YM}(A) + \varepsilon \int_M \langle a \wedge *\mathrm{d}_A^* F_A \rangle \mod \varepsilon^2. \end{aligned}$$

ここで $\mathrm{d}_A^* = - *^{-1} \mathrm{d}_A *$ である．よってヤン＝ミルズ汎関数による臨界点は $\mathrm{d}_A^* F_A = 0$ と書ける．これを **ヤン＝ミルズ方程式** という．これは A に対する 2 階非線型偏微分方程式である．ヤン＝ミルズ方程式の解である接続 A を **ヤン＝ミルズ接続** という．ヤン＝ミルズ接続をゲージ変換したものもヤン＝ミルズ接続である．

$n = 4$, $G = \mathrm{U}(1)$ で，g がリーマン計量でなくローレンツ計量である場合，ヤン＝ミルズ方程式はマクスウェル方程式になる．

ヤン＝ミルズ接続 A と $a \in \Omega^1(M, \mathfrak{g}_P)$ に対し，ヤン＝ミルズ方程式 $\mathrm{d}_{A+a}^* F_{A+a} = 0$ は，$\mathrm{d}_{A+a} = \mathrm{d}_A + [a, -]$ より，

$$\mathrm{d}_A * \left(\mathrm{d}_A a + \frac{1}{2}[a, a] \right) + \left[a, * \left(\mathrm{d}_A a + \frac{1}{2}[a, a] \right) \right] = 0$$

に同値である．

5.5.4 ASD 接続

G をコンパクト・リー群，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ をそのリー環，$\langle \ , \rangle : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ を $\mathfrak{g}$ 上の不変内積とする．(M, g) を向きづけられた 4 次元コンパクト・リーマン多様体，$\pi : P \to M$ を G 主束とする．4 次元なので，スター作用素 $* : \Omega^2(M, \mathfrak{g}) \to \Omega^2(M, \mathfrak{g})$ は $*^2 = \mathrm{id}$ をみたす．よって $*$ の固有値 ± 1 に対応して，固有空間への直和分解

$$\Omega^2(M, \mathfrak{g}) = \Omega^2(M, \mathfrak{g})_+ \oplus \Omega^2(M, \mathfrak{g})_-$$

がある．これに対し，接続 A の曲率 F_A は

$$F_A = F_A^+ + F_A^-, \quad *F_A^\pm = \pm F_A$$

のように一意的に分解する．この分解はゲージ変換で不変である．このとき，

$$\langle F_A \wedge *F_A \rangle = \langle F_A^+ \wedge F_A^+ \rangle - \langle F_A^- \wedge F_A^- \rangle = \langle F_A^+ \wedge *F_A^+ \rangle + \langle F_A^- \wedge *F_A^- \rangle,$$
$$\langle F_A^+ \wedge F_A^- \rangle = 0.$$

$F_A^- = 0$ すなわち $*F_A = F_A$ となる接続 A を自己双対接続あるいは SD 接続といい，$F_A^+ = 0$ すなわち $*F_A = -F_A$ となる接続 A を反自己双対接続あるいは **ASD 接続** という（SD は "Self-Dual" から，ASD は "Anti-Self-Dual" から）．A に対する 1 階偏微分方程式 $*F_A = F_A$ を SD 方程式，$*F_A = -F_A$ を **ASD 方程式** という．これらは A に対する 1 階非線型偏微分方程式である．

SD 接続をゲージ変換したものは SD 接続であり，ASD 接続をゲージ変換したものは ASD 接続である．

A を SD または ASD 接続とすると，ビアンキ恒等式より $\mathrm{d}_A {*F_A} = \pm \mathrm{d}_A F_A = 0$，すなわち A はヤン＝ミルズ接続である．

接続 A と $a \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ に対し，ビアンキの恒等式より，

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{2} \langle F_{A+ta} \wedge F_{A+ta} \rangle \bigg|_{t=0} &= \langle \mathrm{d}_A a \wedge F_A \rangle \\ &= \mathrm{d}\langle a \wedge F_A \rangle + \langle a \wedge \mathrm{d}_A F_A \rangle = \mathrm{d}\langle a \wedge F_A \rangle. \end{aligned}$$

よって M がコンパクト 4 次元多様体の場合，$c(P) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_M \langle F_A \wedge F_A \rangle$ は接続 A に依存しない．さらに

$$c(P) = \frac{1}{2} \int_M \langle F_A^+ \wedge F_A^+ \rangle + \langle F_A^- \wedge F_A^- \rangle = \frac{1}{2} \int_M \langle F_A^+ \wedge *F_A^+ \rangle - \langle F_A^- \wedge *F_A^- \rangle$$

より，

$$\mathcal{YM}(A) = -c(P) + \int_M \langle F_A^+ \wedge *F_A^+ \rangle \geq -c(P),$$
$$\mathcal{YM}(A) = c(P) + \int_M \langle F_A^- \wedge *F_A^- \rangle \geq c(P).$$

したがって，$c(P) < 0$ の場合 $F_A^+ = 0$ すなわち A が ASD 接続のときに $\mathcal{YM}(A)$ は最小，$c(P) > 0$ の場合 $F_A^- = 0$ すなわち A が SD 接続のときに $\mathcal{YM}(A)$ は最小，$c(P) = 0$ の場合 $F_A = 0$ すなわち A が平坦接続のときに $\mathcal{YM}(A)$ は最小である．

M がコンパクトでない場合も含め，ヤン＝ミルズ汎関数が有限の値をもつような SD 接続，ASD 接続を **インスタントン** という．インスタントン全体のな

す $\mathcal{A}_P/\mathcal{G}_P$ の部分集合 $\mathcal{M}_P$ をインスタントンの **モジュライ空間** という．この空間が，実は 4 次元多様体 M のトポロジーの微妙な情報を荷っている．これを調べるためには関数解析の準備が必要である．

5.5.5 AHS 複体

直和分解 $\Omega^2(M, \mathfrak{g}) = \Omega^2(M, \mathfrak{g})_+ \oplus \Omega^2(M, \mathfrak{g})_-$ により，共変外微分 $\mathrm{d}_A : \Omega^1(M, \mathfrak{g}) \to \Omega^2(M, \mathfrak{g})$ も $\mathrm{d}_A = \mathrm{d}_A^+ + \mathrm{d}_A^-$ と分解する．ASD 接続 A に対し，$\mathrm{d}_A^+\mathrm{d}_A = 0$ となる．このとき

$$0 \to \Omega^0(M, \mathfrak{g}) \underset{\mathrm{d}_A}{\to} \Omega^1(M, \mathfrak{g}) \underset{\mathrm{d}_A^+}{\to} \Omega^2(M, \mathfrak{g})_+ \to 0$$

を **AHS 複体** とよぶ．Atiyah-Hitchin-Singer の頭文字からそうよばれている．

インスタントンのモジュライ空間の次元は，微分作用素

$$\mathrm{d}_A^* + \mathrm{d}_A^+ : \Omega^1(M, \mathfrak{g}) \to \Omega^0(M, \mathfrak{g}) \oplus \Omega^2(M, \mathfrak{g})_+$$

が全射である場合，核の次元である．この微分作用素は楕円型作用素になっている．この量はアティヤ＝シンガー指数定理によって計算することができる．

第 6 章

コンパクト作用素とフレドホルム作用素

ヤン＝ミルズ方程式や ASD 方程式を調べるには関数解析が必要になる．関数解析では，積分作用素や微分作用素に対して少し心理的距離をおいて，それらを無限次元ベクトル空間の間の線型写像として取り扱う．そのうちもっとも有限次元の場合に近いものがコンパクト作用素の理論である．その原型は 2 階常微分方程式の境界値問題にさかのぼる．

コンパクト作用素の理論における基本定理はアスコリ＝アルツェラの定理である．コンパクト作用素に関するフレドホルムの二択定理は，バナッハ空間の間の有界作用素という設定におけるフレドホルム作用素の理論として定式化される．

比例概念と計量概念は数学の二本の柱だが，関数解析は，線型作用素という比例概念とノルムや測度という計量概念を原理として，微分方程式などでモデル化された自然界の法則に肉薄する．

6.1 グリーン関数

6.1.1 C^1 関数の境界値

有界閉区間 $I = [a, b]$ 上連続で内部 (a, b) 上微分可能な関数 f に対し，平均値の定理より，

$$\lim_{x \to a+0} f'(x) = A \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A,$$

$$\lim_{x \to b-0} f'(x) = B \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to b-0} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = B$$

がなりたつ．そこで，有界閉区間 I 上の C^1 関数 f を，内部で C^1 級であって f, f' が I 上の連続関数に拡張されるものであると定義する．そうしておけば，境界での右微分・左微分の存在も言える．

より一般に，$\mathbb{R}^n$ の開集合 U に対し，$C^k(\overline{U})$ を，$C^k(U)$ に属する実または

複素数値関数であって，k 階以下の導関数が閉包 $\overline{U}$ 上に連続に拡張できるもの全体のなすベクトル空間とする．

6.1.2 スツルム＝リウヴィユ型境界値問題

有界閉区間 $I = [a_1, a_2]$ 上の実数値連続関数 $p(x) > 0$ と有限個の点を除いて連続な実数値関数 $q(x)$ に対し，2 階常微分作用素

$$L = L_x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + q(x)$$

を考える．I 上の複素数値 C^1 級関数 u で pu' が q の不連続点を除いて C^1 級であり，Lu が I 上の連続関数に拡張できるもの全体のなすベクトル空間を $C^L(I)$ とする．

$\mathbb{C}^4 = \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ の 2 次元部分空間 $\mathcal{B}$ に対し，境界条件

$$\beta[u] = \begin{bmatrix} u(a_1) & p(a_1)u'(a_1) \\ u(a_2) & p(a_2)u'(a_2) \end{bmatrix} \in \mathcal{B}$$

の下で，$u \in C^L(I)$ を未知関数とする次の 2 つの線型常微分方程式を考える．

1. 与えられた複素数値連続関数 φ に対する $Lu = \varphi$（ポアソン方程式）
2. 複素数 λ に対する $Lu = \lambda u$（固有値問題）

これらをスツルム＝リウヴィユ型境界値問題とよぶ．

6.1.3 境界条件

$I = [a_1, a_2]$ 上の複素数値連続関数 u, v に対し，$\mathbb{C}$ 線型な内積を

$$\langle u, v \rangle = \int_{a_1}^{a_2} u(x)v(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{C}$$

で与えると，$u, v \in C^L(I)$ に対し，

$$\begin{aligned}\langle u, Lv \rangle - \langle Lu, v \rangle &= \int_{a_1}^{a_2} (u(pv')' - v(pu')')\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\begin{vmatrix} u(x) & p(x)u'(x) \\ v(x) & p(x)v'(x) \end{vmatrix}\right]_{a_1}^{a_2}\end{aligned}$$

がなりたつ．

$\mathbb{C}^4 = \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ の元を $\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ で表すとき，b_i を $\mathbb{C}^4$ 上の線型関数と見て，$\omega = -b_1 \wedge b_2 + b_3 \wedge b_4 \in \bigwedge^2(\mathbb{C}^4)^*$ とおく．

$\mathcal{B}$ の基底 $\beta_j = \begin{bmatrix} b_1(\beta_j) & b_2(\beta_j) \\ b_3(\beta_j) & b_4(\beta_j) \end{bmatrix}$ $(j = 1, 2)$ と双対基底 β_1^*, β_2^* に対し，

$$\omega|\mathcal{B} = \left(-\begin{vmatrix} b_1(\beta_1) & b_2(\beta_1) \\ b_1(\beta_2) & b_2(\beta_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_3(\beta_1) & b_4(\beta_1) \\ b_3(\beta_2) & b_4(\beta_2) \end{vmatrix}\right) \beta_1^* \wedge \beta_2^*.$$

$\omega|\mathcal{B}=0$ となる部分ベクトル空間 $\mathcal{B}$ を **ラグランジュ部分空間** という．$\mathcal{B}$ がラグランジュ部分空間であるとき，$\beta[u], \beta[v] \in \mathcal{B}$ ならば，$\langle u, Lv\rangle = \langle Lu, v\rangle$ である．

周期条件 $p(a_1)=p(a_2)$ を課す場合，$\mathcal{B}$ が周期的境界条件である，すなわち $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ で張られるとすると，これもラグランジュ部分空間である．

以下，境界条件 $\mathcal{B}$ はラグランジュ部分空間であるとする．

6.1.4 グリーン関数

定義 6.1.1 微分作用素 L と境界条件 $\mathcal{B}$ に対し，連続関数 $G(x, \xi)$ で，

$$L_x G(x, \xi) = \delta(x-\xi), \quad \beta[G(\cdot, \xi)] \in \mathcal{B}$$

をみたすものを **グリーン関数** という．

ここで，$\delta(x)$ はディラックの **デルタ関数** である．これは **ヘヴィサイド関数**

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

の導関数であり，超関数の理論において正式に定義される．

点 $\xi \in (a_1, a_2)$ と $\beta \in \mathcal{B}$ に対し，

$$v \in C^L([a_1, \xi) \cup (\xi, a_2]), \quad Lv=0, \quad \beta[v]=\beta$$

をみたすものが一意的に存在する．これを用いて，線型写像 $\alpha_\xi : \mathcal{B} \to \mathbb{C}^2$ を

$$\alpha_\xi(\beta) = (v(\xi+0)-v(\xi-0),\ p(\xi)(v'(\xi+0)-v'(\xi-0)))$$

で定義する．$\alpha_\xi(\beta)=(0, 1)$ となる $\beta \in \mathcal{B}$ に対し，グリーン関数 $G(x, \xi)$ が存在して，$\beta = \beta[G(\cdot, \xi)]$ となる．

$Lu=0,\ \beta[u] \in \mathcal{B}$ の $[a_1, a_2]$ 上の解が $u=0$ に限るならば，α_ξ は同型であり，よってグリーン関数が存在する．また，2 つのグリーン関数の差 u は $u \in C^L(I),\ Lu=0,\ \beta[u] \in \mathcal{B}$ をみたす．

結局次が言えたわけである．

定理 6.1.1 $Lu=0,\ \beta[u] \in \mathcal{B}$ の解 $u \in C^L(I)$ が $u=0$ に限るならば，グリーン関数がただ一つ存在する．

グリーン関数 G に対し，

$$\begin{aligned}&G(\xi_1, \xi_2)-G(\xi_2, \xi_1)\\ &=\int_{a_1}^{a_2}((L_x G(x, \xi_1))G(x, \xi_2)-G(x, \xi_1)(L_x G(x, \xi_2)))\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= [-p(x)(\partial_x G(x,\,\xi_1))G(x,\,\xi_2) + p(x)G(x,\,\xi_1)(\partial_x G(x,\,\xi_2))]_{a_1}^{a_2}$$
$$= \left[\begin{vmatrix} G(x,\,\xi_1) & p(x)\partial_x G(x,\,\xi_1) \\ G(x,\,\xi_2) & p(x)\partial_x G(x,\,\xi_2) \end{vmatrix}\right]_{a_1}^{a_2},$$

よって次が示された.

定理 6.1.2 グリーン関数 G が存在するとき，$G(\xi_1,\,\xi_2) = G(\xi_2,\,\xi_1)$.

6.1.5 ポアソン方程式と固有値問題

$L, \mathcal{B}$ のグリーン関数 $G(x,\,\xi)$ が存在するとする.

複素数値連続関数 φ に対し,

$$u = \int_{a_1}^{a_2} G(x,\,\xi)\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

とおくと，$Lu = \varphi, \quad \beta[u] \in \mathcal{B}$.

また，$Lu = 0,\ \beta[u] \in \mathcal{B}$ の解が $u = 0$ に限るとき，$Lu = \varphi, \beta[u] \in \mathcal{B}$ とすると,

$$u = \int_{a_1}^{a_2} G(x,\,\xi)\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

また，積分作用素

$$u(x) \mapsto Ku(x) = \int_{a_1}^{a_2} G(x,\,\xi)u(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

の固有値 $\mu \in \mathbb{C}$ に対する固有関数 u は，$u = \mu Lu$ をみたすので，$\mu \neq 0$, $Lu = \mu^{-1}u$.

L が 0 を固有値としてもたないならば，微分作用素 L の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対する固有関数 u は，$LKu = u = \lambda^{-1}Lu$ をみたす．よって $Ku = \lambda^{-1}u$.

6.1.6 拡張されたグリーン関数

ベクトル空間 $V = \{u \in C^L(I) \mid Lu = 0,\ \beta[u] \in \mathcal{B}\}$ が 1 次元であるとする．$u_0 \in V$ を $\langle u_0,\,u_0\rangle = 1$ となるように取ると，$\langle u,\,u_0\rangle = 0$ ならば，$\langle Lu,\,u_0\rangle = \langle u,\,Lu_0\rangle = 0$ である.

定義 6.1.2 このとき，連続関数 $\widetilde{G}(x,\,\xi)$ で,

$$L_x\widetilde{G}(x,\,\xi) = -u_0(\xi)u_0(x) + \delta(x-\xi), \quad \beta[\widetilde{G}(\cdot,\,\xi)] \in \mathcal{B}$$

および $\langle\widetilde{G}(\cdot,\,\xi),\,u_0\rangle = 0$ をみたすものを **拡張されたグリーン関数** とよぶ.

これに対し，$\langle L\widetilde{G}(\cdot,\,\xi),\,u_0\rangle = 0$ であることに注意する.

拡張されたグリーン関数の差 u は,

$$u \in C^L(I), \quad Lu = 0, \quad u \in \mathcal{B}, \quad \langle u,\,u_0\rangle = 0$$

をみたすので，$\dim V = 1$ より，$u = 0$ である．すなわち拡張されたグリーン関数は一意的である．

以下，拡張されたグリーン関数の存在を示す．

点 $\xi \in (a_1, a_2)$ と $\beta \in \mathcal{B}$, $c \in \mathbb{C}$ に対し，

$$v \in C^L([a_1, \xi) \cup (\xi, a_2]), \quad Lv = cu_0, \quad \beta[v] = \beta$$

をみたすものが一意的に存在する．これを用いて，線型写像 $\widetilde{\alpha}_\xi : \mathcal{B} \oplus \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ を

$$\widetilde{\alpha}_\xi(\beta, c) = (v(\xi+0) - v(\xi-0), \ p(\xi)(v'(\xi+0) - v'(\xi-0)))$$

で定義する．$\dim V = 1$ より，$\widetilde{\alpha}_\xi$ が全射であることが従う．$\widetilde{\alpha}_\xi(\beta, c) = (0, 1)$ となる $\beta \in \mathcal{B}$, $c \in \mathbb{C}$ に対し，グリーン関数 $\widetilde{G}(x, \xi)$ が存在して，$\beta = \beta[\widetilde{G}(\cdot, \xi)]$ となる．このとき $c = -u_0(\xi)$ である．よって次が言えた．

定理 6.1.3 $\dim V = 1$ ならば，拡張されたグリーン関数がただ一つ存在する．

このとき，$\widetilde{G}(\xi_1, \xi_2) = \widetilde{G}(\xi_2, \xi_1)$ である．

任意の $u \in C^L(I)$ に対し，$\langle Lu, u_0 \rangle = \langle u, Lu_0 \rangle = 0$ である．そこで，I 上の連続関数 φ で $\langle \varphi, u_0 \rangle = 0$ であるものに対し，ポアソン方程式 $Lu = \varphi$ を条件 $\beta[u] \in \mathcal{B}$, $\langle u, u_0 \rangle = 0$ の下で考える．解 u はただ一つで，

$$u(x) = \int_{a_0}^{a_1} \widetilde{G}(x, \xi)\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

と表される．また，

$$\int_{a_1}^{a_2} \widetilde{G}(x, \xi)u(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \mu u(x), \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad u \not\equiv 0, \quad \langle u, u_0 \rangle = 0$$

ならば，$u = \mu L u, \quad \mu \neq 0, \quad Lu = \mu^{-1}u$ である．$\dim V = 1$ より，

$$Lu = \lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad u \not\equiv 0, \quad \langle u, u_0 \rangle = 0$$

ならば，$\lambda \neq 0$ である．

$$v(x) = \int_{a_1}^{a_2} G(x, \xi)u(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

とおくと，$Lv = u = \lambda^{-1}Lu$, $\langle v, u_0 \rangle = 0$．よって $v = \lambda^{-1}u$ である．すなわち，

$$\int_{a_1}^{a_2} G(x, \xi)u(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \lambda^{-1}u(x).$$

6.2 コンパクト作用素

6.2.1 アスコリ=アルツェラの定理

定理 6.2.1 コンパクト・ハウスドルフ空間 K 上の実または複素数値関数列

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が,

（一様有界性）実数 M が存在して，任意の自然数 n と点 $x \in K$ に対し，$|f_n(x)| \le M$.

（同程度連続性）任意の $\varepsilon > 0$ と $x \in X$ に対し，x の近傍 $V_{x,\varepsilon}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}, y \in V_{x,\varepsilon}$ に対し，$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$.

をみたすとする．このとき，$\{f_n\}$ の部分列で K 上一様収束するものが存在する．

証明 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 条件の $V_{x,\varepsilon}$ は開集合としてよい．K はコンパクトなので, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し, K の有限部分集合 A_k が存在して, $K = \bigcup_{x\in A_k} V_{x,1/k}$.

一様有界性より，任意の $k \in \mathbb{N}$ と $\{f_n\}$ の任意の部分列 $\{g_n\}$ に対し，その部分列 $\{h_n\}$ が存在して，任意の $x \in A_k$ に対し $\{h_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ の任意の 2 点間の距離は $1/k$ より小さい．（立方体 $[-M, M]^{|A_k|}$ を小さい立方体に等分すると，少なくとも一つは無限項の $(g_n(x))_{x\in A_k}$ を含む．）

したがって，$\{f_n\}$ の部分列 $\{f_n^{(1)}\}$, その部分列 $\{f_n^{(2)}\}$, その部分列 $\{f_n^{(3)}\}$, と取っていって，任意の $x \in A_k$ に対し $\{f_n^{(k)}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ の任意の 2 点間の距離が $1/k$ より小さいようにできる．

そこで任意の $y \in K$ に対し，$x \in A_k$ を $y \in V_{x,1/k}$ となるように取ると，任意の $m \ge k$ に対し，

$$
\begin{aligned}
&|f_m^{(m)}(y) - f_k^{(k)}(y)| \\
&\le |f_m^{(m)}(y) - f_m^{(m)}(x)| + |f_m^{(m)}(x) - f_k^{(k)}(x)| + |f_k^{(k)}(x) - f_k^{(k)}(y)| < \frac{3}{k}.
\end{aligned}
$$

したがって，$\{\sup_{x\in K} f_n^{(n)}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列．よって $\{f_n^{(n)}\}$ は K 上一様に収束する． □

アスコリ＝アルツェラはアルファベット順が逆だが，語尾の母音が『フニクリ・フニクラ』『オブラディ・オブラダ』『ぐりとぐら』と同じで呼びやすい．

6.2.2 コンパクト作用素

実または複素ノルム空間 V の元 u, v の距離を $\|u - v\|$ によって定義し，V を距離空間と見なす．

定義 6.2.1 ノルム空間 V_1 から V_2 への線型写像 K が **コンパクト作用素** であるとは，V_1 上の任意の有界列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，$\{Ku_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の収束する部分列が存在することである．この条件は，任意の有界集合 $A \subset V_1$ に対し，$K(A) \subset V_2$ が相対コンパクトであることと同値である．

1. ベクトルとして関数を想定している状況では，線型写像のことを作用素とよぶことが多い．

2. ノルム空間の間の線型写像 $K : V_1 \to V_2$ が有限階数であるとは，像 $K(V_1)$ が有限次元であることである．このとき K はコンパクト作用素である．

ノルム空間 V の部分集合 X と点 $y \in V$ に対し，

$$d(y,\, X) = \inf\{\|y - x\| \mid x \in X\}$$

とおく．

補題 6.2.1 ノルム空間 V の閉部分集合 $X \subsetneq V$ と $0 < \theta < 1$ に対し，$y_0 \in V$ が存在して，$\|y_0\| = 1$, $d(y_0,\, X) \geq \theta$ である．

証明 $y_1 \in V \setminus X$ に対し，$\delta = d(y_1,\, X)$ とおくと，$x_1 \in X$ が存在して，$\theta\|y_1 - x_1\| \leq \delta$ となる．$y_0 = \dfrac{1}{\|y_1 - x_1\|}(y_1 - x_1)$ とおくと，$\|y_0\| = 1$ かつ任意の $x \in X$ に対し，$\|y_0 - x\| \geq \dfrac{1}{\|y_1 - x_1\|}\delta \geq \theta$. □

この補題より次が従う．

定理 6.2.2 ノルム空間 V が有限次元であることは $\{u \in V \mid \|u\| \leq 1\}$ がコンパクトであることに同値である．

定理 6.2.3 コンパクト作用素 $K : V \to V$ の固有値はたかだか可算であり，集積点は 0 のみである．0 でない固有値に対する固有空間は有限次元である．

証明 V 上の 1 次独立な列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ および $\lambda \neq 0$ に収束する複素数列 $\lambda_n \neq 0$ で，$Ku_n = \lambda_n u_n$ をみたすものがあったとする．$u_1, \ldots, u_n$ の生成する部分ベクトル空間を X_n とする．補題 6.2.1 より，V の列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して，

$$y_n \in X_n, \quad \|y_n\| = 1, \quad d(y_n,\, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

このとき任意の $n > m$ に対し，${\lambda_n}^{-1}Ky_n - {\lambda_m}^{-1}Ky_m - y_n \in X_{n-1}$．よって

$$\|{\lambda_n}^{-1}Ky_n - {\lambda_m}^{-1}Ky_m\| \geq \frac{1}{2}.$$

$\lambda_n \to \lambda \neq 0$ なので，これは K がコンパクト作用素であることに反する． □

6.2.3 有界作用素

定義 6.2.2 ノルム空間の間の線型写像 $T : V_1 \to V_2$ が **有界作用素** であるとは，$\{\|Tu\| \mid \|u\| = 1\}$ が有界であること．この集合の上限を $\|T\|$ と書き，T の **作用素ノルム** という．

1. ノルム空間の間の作用素が有界であることと連続であることは同値である．すなわち，有界作用素は連続写像であるし，また作用素 $T : V_1 \to V_2$ が有界でないとすると，V_1 上の列 $\{u_n\}$ で $\|u_n\| \to 0$, $\|Tu_n\| = 1$ となるも

のが存在する．

2. 作用素ノルムは2つのノルム空間の間の有界作用素全体のなすベクトル空間上のノルムである．
3. コンパクト作用素は有界である．
4. ノルム空間の間の線型写像 $T : V_1 \to V_2$, $S : V_2 \to V_3$ に対し，
   (a) T, S が有界ならば ST は有界であり，$\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|$.
   (b) T がコンパクト，S が有界ならば ST はコンパクトである．
   (c) S がコンパクト，T が有界ならば ST はコンパクトである．

定理 6.2.4 エルミート内積をもつ複素ベクトル空間 V 上のエルミート作用素 $T : V \to V$ に対し，

$$\|T\| = \sup\{|\langle u, Tu\rangle| \mid \|u\| = 1\} = \sup\{|\langle v, Tu\rangle| \mid \|u\| = \|v\| = 1\}.$$

証明 中辺を α，右辺を β とおく．$\alpha \leq \beta$ は自明．$\|u\| = \|v\| = 1$ とする．コーシー＝シュワルツの不等式より，$|\langle v, Tu\rangle| \leq \|v\| \cdot \|Tu\| \leq \|T\|$．よって $\beta \leq \|T\|$ を得る．また，

$$\langle u+v, T(u+v)\rangle - \langle u-v, T(u-v)\rangle = 4\,\mathrm{Re}\langle v, Tu\rangle$$

より，

$$|\langle v, Tu\rangle| \leq \frac{\alpha}{4}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) = \alpha.$$

よって $Tu \neq 0$ ならば $v = \dfrac{1}{\|Tu\|}Tu$ とおいて $\|Tu\| \leq \alpha$ を得る．$Tu = 0$ ならばもちろん $\|Tu\| \leq \alpha$ である．したがって $\|T\| \leq \alpha$ を得る． □

6.2.4 ヒルベルト＝シュミットの展開定理

コンパクト作用素の概念は積分作用素の研究から生まれた．

有界閉区間 $I = [a_1, a_2]$ 上の複素数値連続関数全体のなすベクトル空間を $C(I)$ とする．$u, v \in C(I)$ に対し，

$$\langle u, v\rangle = \int_{a_1}^{a_2} \overline{u(x)}v(x)\,\mathrm{d}x,\ \|u\|_2 = \sqrt{\langle u, u\rangle},\ \|u\|_\infty = \sup\{|u(x)| \mid x \in I\}$$

とおく．$\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ はノルムであり，$|I| = |a_2 - a_1|$ とおくと，$|I|^{-1/2}\|u\|_2 \leq \|u\|_\infty$ である．

$I \times I$ 上の複素数値連続関数 $G(x, \xi)$ に対し，線型写像 $K : C(I) \to C(I)$ を

$$(Ku)(x) = \int_{a_0}^{a_1} G(x, \xi)u(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad u \in C(I)$$

によって定義する．K を積分作用素, G を核関数という．このとき, コーシー＝シュワルツの不等式より,

$$|(Ku)(x)| \le \|G(x,\,\cdot)\|_2 \cdot \|u\|_2, \tag{6.1}$$

$$|(Ku)(x_1) - (Ku)(x_2)| \le \|G(x_1,\,\cdot) - G(x_2,\,\cdot)\|_2 \cdot \|u\|_2. \tag{6.2}$$

定理 6.2.5 K は $(C(I), \|\cdot\|_2)$ から $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ へのコンパクト作用素である．すなわち，$(C(I), \|\cdot\|_2)$ 上の任意の有界列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，$\{Ku_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の一様収束する部分列が存在する．

証明 不等式 (6.1) より一様有界性が，(6.2) より同程度連続性が言え，アスコリ＝アルツェラの定理 6.2.1 が適用できる． □

以下，G がエルミート対称，すなわち $G(x,\xi) = \overline{G(\xi,x)}$ であるとする．（前節のラグランジュ部分空間による境界条件に対するグリーン関数はこの条件をみたしている．）

このとき $\langle u, Kv\rangle = \langle Ku, v\rangle$ $(u, v \in C(I))$ がなりたち，$\langle u, Ku\rangle \in \mathbb{R}$ となる．よって K の固有値は実数である．また相異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交する．

$|I|^{-1/2}\|u\|_2 \le \|u\|_\infty$ より，K は $(C(I), \|\cdot\|_2)$ から自分自身への有界作用素でもある．作用素ノルムを $\|K\| = \sup\{\|Ku\|_2 \mid \|u\|_2 = 1\}$ とする．

定理 6.2.6 $\|K\|$ は $K : C(I) \to C(I)$ の固有値である．

証明 $\alpha = \|K\|$ とおく．$\alpha > 0$ としてよい．$\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ とする．定理 6.2.4 より，$C(I)$ 上の列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して，

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} |\langle u_n, Ku_n\rangle|, \quad \|u_n\| = 1.$$

定理 6.2.5 より，$\{Ku_n\}$ は $v \in C(I)$ に一様収束するとしてよい．また，$\alpha = \lim_{n\to\infty}\langle u_n, Ku_n\rangle$ として一般性を失わない．逆の符号の場合は K の代わりに $-K$ を考えればよい．以下，$Kv = \alpha v$, $v \ne 0$ を示す．

$$\|Ku_n - \alpha u_n\|^2 = \|Ku_n\|^2 - 2\alpha\,\mathrm{Re}\langle u_n, Ku_n\rangle + \alpha^2\|u_n\|^2$$

の右辺は $n\to\infty$ のとき $\|v\|^2 - \alpha^2$ に収束する．ゆえに $\|v\| \ge \alpha > 0$ となり，$v \ne 0$ がわかる．また $\|Ku_n\| \le \alpha$ より，$\lim_{n\to\infty}\|Ku_n - \alpha u_n\|^2 = 0$．ゆえに $\lim_{n\to\infty}\|K(Ku_n - \alpha u_n)\|^2 = 0$．

これより $\|Kv - \alpha v\|^2 = 0$, $Kv = \alpha v$ が従う． □

定理 6.2.3 より，K の固有値が無限にあるならば，K のすべての固有空間の直和の正規直交基底 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と実数列 λ_n で，$|\lambda_n| \ge |\lambda_{n+1}|$, $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0$, $Ku_n = \lambda_n u_n$ をみたすものが存在する．これに対して次が成立する．

定理 6.2.7（ベッセルの不等式）任意の $u \in C(I)$ に対し，

$$\|u\|_2{}^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u_n,\, u\rangle|^2.$$

証明 $\|u - \sum_{n=1}^{m} \langle u_n,\, u\rangle\, u_n\|_2{}^2 = \|u\|_2{}^2 - \sum_{n=1}^{m} |\langle u_n,\, u\rangle|^2$ より． □

定理 6.2.8（ヒルベルト＝シュミットの展開定理）任意の $u \in C(I)$ に対し，級数 (*) $\sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n,\, Ku\rangle\, u_n$ は Ku に一様絶対収束する．

証明 $\langle u_n,\, Ku\rangle = \langle Ku_n,\, u\rangle = \lambda_n \langle u_n,\, u\rangle$．また $G(x,\,\cdot)$ にベッセル不等式を適用すると，$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n u_n(x)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |Ku_n(x)|^2 \leq \|G(x,\,\cdot)\|_2{}^2$．よってコーシー＝シュワルツの不等式より，

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{\infty} |\langle u_n,\, Ku\rangle\, u_n(x)| &= \sum_{n=k}^{\infty} |\langle u_n,\, u\rangle\, \lambda_n u_n(x)| \\ &\leq \left(\sum_{n=k}^{\infty} |\langle u_n,\, u\rangle|^2\right)^{1/2} \|G(x,\,\cdot)\|_2.\end{aligned}$$

ベッセルの不等式（定理 6.2.7）より，$k \to \infty$ のとき右辺は 0 に収束する．よって級数 (*) は一様絶対収束する．極限 v は連続関数である．

$$G_n(x,\,\xi) = G(x,\,\xi) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_n u_n(x)\overline{u_n(\xi)}$$

とおくと，$G_n(x,\,\xi) = \overline{G_n(\xi,\,x)}$ である．これを核関数とする積分作用素を K_n とすると，これも $(C(I),\,\|\cdot\|_2)$ から $(C(I),\,\|\cdot\|_0)$ へのコンパクト作用素であり，$(C(I),\,\|\cdot\|_2)$ 上のエルミート作用素である．そして，

$$K_n u = Ku - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle u_k,\, u\rangle\, u_k = Ku - \sum_{k=1}^{n} \langle u_k,\, Ku\rangle\, u_k.$$

これは $n \to \infty$ のとき $Ku - v$ に一様収束する．よって $\lim_{n\to\infty} \|K_n u\|_2 = \|Ku - v\|_2$．

$k \leq n$ に対し，$K_n u_k = 0$．ゆえに，$K_n w = \lambda w,\, \lambda \neq 0,\, w \neq 0$ ならば，$\langle u_k,\, w\rangle = 0$．よって $K_n w = Kw$ となり，λ は K の固有値で，$|\lambda| \leq |\lambda_{n+1}|$．

よって定理 6.2.5 を K_n に適用すると，$\|K_n\| \leq |\lambda_{n+1}|$．したがって，$\lim_{n\to\infty} \|K_n\| = 0$．よって $\lim_{n\to\infty} \|K_n u\|_2 = 0$．

したがって，$\|Ku - v\|_2 = 0,\, Ku = v$． □

6.3 フレドホルム作用素

6.3.1 フレドホルムの二択定理

定理 6.3.1 ノルム空間 V 上のコンパクト作用素 $K : V \to V$ と恒等写像

$I : V \to V$ に対し，$T = I - K$ とおき，T の核を N とする．

(1) N は有限次元である．

(2) 定数 C が存在して，任意の $x \in V$ に対し，$d(x, N) \le C\|Tx\|$．

(3) 像 $T(V)$ は閉集合である．

(4)（フレドホルムの二択定理）次のいずれかがなりたつ．

　(a) T は単射でも全射でもない．

　(b) T は同型で，T^{-1} は有界である．

証明 (1) $u \in N$，すなわち $Tu = 0$ とすると，$u = Ku$ である．よって $\{u \in N \mid \|u\| \le 1\}$ はコンパクトである．したがって定理 6.2.2 より，N は有限次元である．

(2) 主張がなりたたないとすると，V 上の列 $\{x_n\}$ が存在して，

$$\|Tx_n\| = 1, \quad \delta_n = d(x_n, N) \to \infty.$$

N 上の列 $\{y_n\}$ が存在し，$\delta_n \le \|x_n - y_n\| \le 2\delta_n$．$z_n = \dfrac{1}{\|x_n - y_n\|}(x_n - y_n)$ とおくと，

$$\|z_n\| = 1, \quad \|z_n - Kz_n\| = \|Tz_n\| \le {\delta_n}^{-1} \to 0.$$

K はコンパクト作用素なので $\{Kz_n\}$ のある部分列が収束する．極限を u_0 とすると，$\{z_n\}$ の対応する部分列も u_0 に収束する．$\|Tz_n\| \to 0$ より，$u_0 \in N$ である．よって

$$\|z_n - u_0\| \ge d(z_n, N) = \frac{1}{\|x_n - y_n\|}\, d(x_n, N) \ge \frac{1}{2}.$$

これは $\{z_n\}$ の部分列が u_0 に収束することに矛盾する．

(3) V 上の列 $\{x_n\}$ に対し，$\{Tx_n\}$ が $u_0 \in V$ に収束するとする．$u_0 \in T(V)$ を示せばよい．

(1) より $\delta_n = d(x_n, N)$ は有界である．よって N 上の列 $\{y_n\}$ が存在して $z_n = x_n - y_n$ は有界である．K はコンパクト作用素なので $\{Kz_n\}$ のある部分列が収束する．極限を v_0 とする．

$$Tx_n + Kz_n = x_n - Kx_n + Kx_n - Ky_n = x_n - y_n$$

の対応する部分列は $u_0 + v_0$ に収束する．$T(x_n - y_n) = Tx_n$ より，

$$T(u_0 + v_0) = u_0.$$

(4) T が同型ならば (1) より T^{-1} は有界である．

T が単射だとする．$T(V) \ne V$ ならば，任意の非負整数 n に対し $T^{n+1}(V) \subsetneq T^n(V)$ となる．

補題 6.2.1 と (2) より，V 上の点列 $\{x_n\}$ が存在して，

$$x_n \in T^n(V), \quad \|x_n\| = 1, \quad d(x_n, T^{n+1}(V)) \geq \frac{1}{2}.$$

$n > m$ に対し，$Kx_n - Kx_m + x_m = x_n - Tx_n - Tx_m \in T^{m+1}(V)$．よって

$$\|Kx_n - Kx_m\| \geq d(x_m, T^{m+1}(V)) \geq \frac{1}{2}.$$

これは K がコンパクト作用素であることに矛盾する．

よって T が単射ならば T は全射になる．

T が全射だとする．$N \neq 0$ ならば，任意の非負整数 n に対し $(T^n)^{-1}(0) \supsetneq (T^{n-1})^{-1}(0)$ となる．$T = I - K$ は有界なので $(T^n)^{-1}(0)$ は閉集合である．よって補題 6.2.1 より，V 上の点列 $\{y_n\}$ が存在して，

$$y_n \in (T^n)^{-1}(0), \quad \|y_n\| = 1, \quad d(y_n, (T^{n-1})^{-1}(0)) \geq \frac{1}{2}.$$

$n > m$ に対し，$Ky_n - Ky_m + y_m = y_n - Ty_n - Ty_m \in (T^{m-1})^{-1}(0)$．よって

$$\|Ky_n - Ky_m\| \geq d(y_m, (T^{m-1})^{-1}(0)) \geq \frac{1}{2}.$$

これは K がコンパクト作用素であることに矛盾する．

よって T が全射ならば T は単射になる． □

6.3.2 ハーン＝バナッハの定理

実または複素ベクトル空間 V から $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ への線型写像を V 上の **線型汎関数** とよぶ．

実ベクトル空間 V 上の関数 $N : V \to \mathbb{R}$ が次をみたすとき，**劣線型関数** であるという．

1. $N(ax) = aN(x) \quad (x \in V,\ a \in [0, \infty))$.
2. $N(x + y) \leq N(x) + N(y) \quad (x, y \in V)$.

実線型汎関数は劣線型である．また劣線型な正関数（7.2.1 節）が半ノルムである．

実ベクトル空間 V 上の劣線型関数 N_1, N_2 が任意の $x \in V$ に対し $N_1(x) \leq N_2(x)$ $(x \in V)$ をみたすとき，N_1 は N_2 で抑えられるという．

定理 6.3.2（ハーン＝バナッハの定理）実ベクトル空間 V 上の劣線型関数 N に対し，V の部分空間 V_0 上の N で抑えられる線型関数は，N で抑えられる V 上の線型関数に拡張される．

証明 V_0 上の N で抑えられる線型関数 φ_0 に対し，V_0 を含む V の部分空間 W と，N で抑えられる W 上の線型関数で φ_0 の拡張であるもの φ_W の対 (W, φ_W) 全体の集合を $\mathcal{X}$ とする．$\mathcal{X}$ は包含関係と関数の制限に関して帰納的集合になる．ツォルンの補題によって $\mathcal{X}$ の極大元 $(W_{\max}, \varphi_{\max})$ が存在し，さらに $W_{\max} = V$ が言える． □

ハーン＝バナッハの定理より次が従う．

定理 6.3.3 ノルム空間 V とその部分空間 W および $x \in V$ に対し，$\delta = d(x, W) > 0$ であるとすると，V 上の有界線型関数 f であって $f|W = 0$, $f(x) = \delta$, $\|f\| = 1$ であるものが存在する．

定理 6.3.4 ノルム空間の任意の有限次元部分空間に対し，補空間で閉であるものが存在する．

証明 ノルム空間 V の有限次元部分空間 W の基底 $u_1, \ldots, u_n$ に対し，定理 6.3.3 より，V 上の有界線型関数 $f_1, \ldots, f_n$ が存在して $f_i(u_j) = \delta_{ij}$ となる．$f_1 = \cdots = f_n = 0$ によって W の補空間が与えられる． □

定理 6.3.5 ノルム空間 V 上のコンパクト作用素 $K : V \to V$ と恒等写像 $I : V \to V$ に対し，$T = I - K$ とおくと，

$$\dim \mathrm{Coker}(T) = \dim \mathrm{Ker}(T).$$

証明 定理 6.3.1 より $N = \mathrm{Ker}(T)$ は有限次元である．定理 6.3.4 より，V における N の補空間で閉であるもの W が存在する．線型写像 $K_0 : V \to V$ で，$K_0|N : N \to V$ と射影 $V \to \mathrm{Coker}(T)$ の合成 $\overline{K}_{0,N}$ が単射または全射であり，$K_0|W$ が 0 であるものが存在する．K_0 は有限階数なのでコンパクト作用素であり，また $T + K_0$ は単射または全射である．よってフレドホルムの二択定理 6.3.1 より，$T + K_0$ は同型であり，$\overline{K}_{0,N} : N \to \mathrm{Coker}(T)$ が同型であることが従う． □

定義 6.3.1 核・余核が有限次元である線型写像 $T : V_1 \to V_2$ に対し，整数 $\mathrm{ind}(T) = \dim \mathrm{Ker}(T) - \dim \mathrm{Coker}(T)$ を T の **指数** という．

- 核・余核が有限次元である線型写像 $T : V_1 \to V_2$, $S : V_2 \to V_3$ に対し，$ST : V_1 \to V_3$ の核・余核も有限次元であって，$\mathrm{ind}(ST) = \mathrm{ind}(T) + \mathrm{ind}(S)$.

このことと定理 6.3.1，6.3.5 より次が従う．

定理 6.3.6 ノルム空間 V_1, V_2 上の恒等写像をそれぞれ I_1, I_2 とし，線型写像 $T : V_1 \to V_2$, $S : V_2 \to V_1$ に対し，$I_1 - ST$, $I_2 - TS$ がコンパクト作用素であるとすると，
(1) T の核・余核，S の核・余核は有限次元であり，$\mathrm{ind}(S) = -\mathrm{ind}(T)$.
(2) $T(V_1)$ は V_2 の，$S(V_2)$ は V_1 の閉部分空間である．

6.3.3 凸性について

ハーン＝バナッハの定理の気持ちを一言で言うと，『双対空間は大きい』『ほしいものがあるならまず双対空間の中で作れ』であろうか．

ハーン＝バナッハの定理のもう一つの側面は，凸性の 2 つの言い方『2 点が線分で結べる』と『半空間の交わりである』の間の関係を与えていることである．つまり存在が示された線型関数が，与えられた凸集合を含む半空間を取り出している．後者の言い方だと『凸集合の射影は凸』が非自明で，この命題が量化子 ∃ の除去になっている．

量化子 ∃ を除いた形に命題を言い直すことは重要で，微分積分では『ある数に収束する列』を『コーシー列』と言い直し，線型代数では『ある行列をかける写像』を『線型写像』と言い直す．

6.3.4 開写像定理・閉グラフ定理

定義 6.3.2 ノルム空間 V が距離空間として完備であるとき，すなわち任意のコーシー列が収束するとき，V は **バナッハ空間** であるという．特にノルムがエルミート内積からのものであるとき，V は **ヒルベルト空間** であるという．

定理 6.3.7 (ベールのカテゴリー定理) 完備距離空間 (X, d) の閉集合の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が，$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ をみたすとき，$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，X_{n_0} は開球を含む．

証明 そのような n_0 が存在しないとすると，次の条件をみたす X 上の点 x_n を中心とする半径 $r_n \leq n^{-1}$ の開球 B_n の列が取れる：

$$\overline{B_1} \subset X \setminus X_1, \quad \overline{B_n} \subset B_{n-1} \cap (X \setminus X_n)\ (n \geq 2).$$

$(x_1, r_1, x_2, r_2, \ldots$ の順に取っていく.$)$ $\{x_n\}$ はコーシー列．極限を x^* とし，$x^* \in X_{n^*}$ とすると，任意の $n \geq n^*$ に対し $\overline{B_{n^*}} \cap X_n = \varnothing$, $d(x^*, x_n) > r_{n^*}$. これは矛盾．□

定理 6.3.8 (開写像定理) バナッハ空間の間の全射有界作用素は開写像である，すなわち任意の開集合の像は開集合である．

証明 X, Y をバナッハ空間，$T : X \to Y$ を全射有界作用素とする．$x \in X$ を中心とする半径 r の開球を $B_X(x, r)$ と書く．

$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{TB_X(0, n)}$ なので，ベールのカテゴリー定理より，$n_0 \in \mathbb{N}$, $x_0 \in X$, $r_0 > 0$ が存在して，$\overline{TB_X(0, n_0)} \supset B_Y(Tx_0, r_0)$.

よって $\overline{TB_X(0, n_0 + \|x_0\|)} \supset B_Y(0, r_0)$. $\rho = (n_0 + \|x_0\|)^{-1} r_0$ とおくと，

$$\overline{TB_X(0, 1)} \supset B_Y(0, \rho) \quad (*).$$

任意の $y \in \overline{TB_X(0, 1)}$ に対し，X 上の点列 $\{x_n\}$ で，

$$\|x_1\| < 1, \quad \|Tx_n - y\| < 2^{-n}\rho, \quad \|x_{n+1} - x_n\| < 2^{-n}$$

となるものが取れる．(x_n まで取れたとすると，$y \in B_Y(Tx_n, 2^{-n}\rho)$ なので，

$(*)$ より，x_{n+1} を $x_{n+1} \in B_X(x_n, 2^{-n})$, $Tx_{n+1} \in B(y, 2^{-n-1}\rho)$ となるように取れる.）$\{x_n\}$ はコーシー列．極限を x とすると，$Tx = y$ で，

$$\|x\| \leq \|x_1\| + \sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\| < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 2.$$

したがって，$TB_X(0, 2) \supset \overline{TB_X(0, 1)} \supset B_Y(0, \rho)$．よって T は開写像． □

定理 6.3.9（閉グラフ定理）バナッハ空間の間の線型写像 $T: V \to W$ のグラフ $\Gamma = \{(x, Tx) \mid x \in X\}$ が $X \times Y$ の閉集合ならば，T は有界．

証明 仮定より Γ はバナッハ空間．射影 $\Gamma \to V$ は有界な全単射．ゆえに開写像定理より逆 $V \to \Gamma$ は有界．よって T は有界． □

6.3.5 フレドホルム作用素

定理 6.3.10 $T: V \to W$ をバナッハ空間の間の有界作用素とし，像 $T(V)$ の補空間 C であって W の閉部分空間であるものが存在するとする．このとき像 $T(V)$ も W の閉部分空間である．

証明 $\mathrm{Ker}(T)$ は V の閉部分空間なので，$V/\mathrm{Ker}(T)$ はバナッハ空間である．ゆえに T は単射であるとしても一般性を失わない．

$i: C \to W$ を包含写像とすると，$T + i: V \oplus C \to W$ はバナッハ空間の間の有界作用素でありかつ同型である．よって開写像定理より，これは同相．したがって，閉部分空間 $V \oplus 0 \subset V \oplus C$ の像 $(T+i)(V \oplus 0) = T(V)$ は W の閉部分空間． □

定義 6.3.3 ノルム空間の間の有界作用素 $T: V_1 \to V_2$ で，核・余核が有限次元であるものを **フレドホルム作用素** という．

定理 6.3.11 バナッハ空間 V_1, V_2 上の恒等写像をそれぞれを I_1, I_2 とし，$T: V_1 \to V_2$ をフレドホルム作用素とすると，

(1) 像 $T(V_1)$ は V_2 の閉部分空間である．

(2) 有界作用素 $S: V_2 \to V_1$ が存在して，$I_1 - ST$, $I_2 - TS$ はコンパクト作用素である．

証明 (1) 仮定より像 $T(V_1)$ の有限次元補空間 C が存在する．有限次元部分空間は閉部分空間なので，定理 6.3.10 より，$T(V_1)$ が閉部分空間であることが従う．

(2) 定理 6.3.4 より，核 $N = \mathrm{Ker}(T)$ の補空間 W_1 で閉であるものが存在する．$T|W_1: W_1 \to T(V_1)$ はバナッハ空間の間の同型．よって開写像定理 6.3.8 より，これは同相．逆写像 $T(V_1) \to W_1$ と，射影 $V_2 \to T(V_1)$ および包含写像 $W_1 \to V_1$ との合成を $S: V_2 \to V_1$ とすると，S は題意をみたす． □

定理 6.3.12 バナッハ空間の間の任意のフレドホルム作用素 $T : V_1 \to V_2$ とコンパクト作用素 $K : V_1 \to V_2$ に対し，$T + K$ もフレドホルム作用素であり，$\mathrm{ind}(T + K) = \mathrm{ind}(T)$.

証明 $T + K$ は有界である．定理 6.3.11 より，有界作用素 $S : V_2 \to V_1$ が存在して，$I_1 - ST$, $I_2 - TS$ はコンパクト作用素である．このとき $I_1 - S(T + K)$, $I_2 - (T + K)S$ もコンパクト作用素である．よって定理 6.3.6 より，$T + K$ はフレドホルム作用素であって，$\mathrm{ind}(T + K) = -\mathrm{ind}(S) = \mathrm{ind}(T)$. □

定理 6.3.13 バナッハ空間の間の任意のフレドホルム作用素 $T : V_1 \to V_2$ に対し，実数 $\alpha > 0$ が存在して，任意の有界作用素 $L : V_1 \to V_2$ で $\|L\| < \alpha$ をみたすものに対し，$T + L$ もフレドホルム作用素で，$\mathrm{ind}(T + L) = \mathrm{ind}(T)$.

証明 定理 6.3.11 より，有界作用素 $S : V_2 \to V_1$ が存在して，$K_1 = I_1 - ST$, $K_2 = I_2 - TS$ はコンパクト作用素である．$\alpha = \|S\|^{-1}$ とおくと，任意の有界作用素 $L : V_1 \to V_2$ で $\|L\| < \alpha$ をみたすものに対し，

$$(I_1 + SL)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-SL)^n, \quad (I_2 + LS)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-LS)^n$$

は有界作用素である（完備性より右辺の収束が言える）．

$(I_1 + SL)S = S(I_2 + LS)$ より，$S(I_2 + LS)^{-1} = (I_1 + SL)^{-1}S$ である．これを S' とおくと S' は有界．

$S(T + L) = I_1 - K_1 + SL$, $(T + L)S = I_2 - K_2 + LS$ より，

$$I_1 - S'(T + L) = (I_1 + SL)^{-1}K_1, \quad I_2 - (T + L)S' = K_2(I_2 + LS)^{-1}$$

はコンパクト作用素である．したがって定理 6.3.6 より，$T + L$ はフレドホルム作用素である．

$\mathrm{ind}(S') = \mathrm{ind}(S)$ より，$\mathrm{ind}(T + L) = \mathrm{ind}(T)$ が従う． □

6.4 L^p 空間

6.4.1 ルベーグ積分のまとめ

定義 6.4.1 (1) 集合 Ω の部分集合の族 $\mathcal{F}$ が **可算加法族** であるとは，

1. $\varnothing \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F}$ ならば $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$
3. $A_n \in \mathcal{F}$ $(n \in \mathbb{N})$ ならば $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

がなりたつこと．$\mathcal{F}$ の元を **可測集合** という．

(2) 集合 Ω 上の可算加法族 $\mathcal{F}$ に対し，写像 $\mu : \mathcal{F} \to [0.\infty] = [0, \infty) \cup \{\infty\}$ が **測度** であるとは，

1. $\mu(\varnothing) = 0$

2. $A_n \in \mathcal{F}$, $A_m \cap A_n = \varnothing$ $(m \neq n)$ に対し $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ がなりたつこと．このとき $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を **測度空間** という．

(3) 測度 μ に対し，可測集合 N で $\mu(N) = 0$ であるものを **零集合** という．Ω 上の 2 つの関数 f, g が零集合を除いて一致するとき，**ほとんどいたるところ等しい**といい，$f = g$ a.e. と書く．また，零集合の補集合の各点で成立する命題を，**ほとんどすべての点**で成立するという．測度空間上の関数列がほとんどいたるところ収束することを，**概収束** という．

(4) 測度 μ が **完備** であるとは，任意の零集合の部分集合が可測であることである．

定理 6.4.1 $\mathbb{R}^n$ 上の完備な測度で，1 辺の長さが a の立方体に対する値が a^n であるものがただ一つ存在する．これを **ルベーグ測度** という．

定理 6.4.2 ルベーグ可測集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対し，測度 $\mu(A)$ は A を含む開集合の測度の下限に一致し，A に含まれるコンパクト集合の測度の上限に一致する．

定義 6.4.2 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．

(1) 可測集合 A の特性関数 1_A（A の点で 1，それ以外の点で 0 となる関数）に対し，$\displaystyle\int 1_A \, \mathrm{d}\mu = \mu(A)$ と定義する．

(2) 有限個の可測集合の特性関数の，非負実数を係数とする 1 次結合全体の集合を $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathcal{F}$ とする．$\displaystyle\int \mathrm{d}\mu$ を線型であるように $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathcal{F}$ 上に拡張する．

(3) $[-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ とする．関数 $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ が **可測関数** であるとは，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し $f^{-1}((a, \infty])$ が可測集合であること．

(4) 非負値可測関数 $f : \Omega \to [0, \infty]$ に対し，

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \sup\left\{\int s \, \mathrm{d}\mu \,\middle|\, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}\mathcal{F},\ s \leq f\right\} \in [0, \infty].$$

と定義する．

(5) 可測関数 f に対し，$f^{\pm}(x) = \max\{\pm f(x), 0\}$ とすると，

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \int f^{+} \mathrm{d}\mu - \int f^{-} \mathrm{d}\mu \in [-\infty, \infty].$$

ただし $\displaystyle\int f^{+} \mathrm{d}\mu = \infty$, $\displaystyle\int f^{-} \mathrm{d}\mu = \infty$ ではないとする．

(6) $\displaystyle\int |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$ であるとき可測関数 f は **可積分** である，あるいは L^1 関数であるという．

(7) 可測関数 f と可測集合 A に対し，$\displaystyle\int_A f \, \mathrm{d}\mu := \int f \, 1_A \, \mathrm{d}\mu$ とおく．

補題 6.4.1 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．非負値可積分関数の増大列 $\{f_n\}$ と $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}\mathcal{F}$ に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n \geq s$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int s \, \mathrm{d}\mu$.

証明 $s = 1_A$, $A \in \mathcal{F}$ の場合に帰着される．

$\varepsilon > 0$ に対し，$A_n = \{x \in A \mid f_n(x) \geq 1 - \varepsilon\}$ とおくとこれは可測で，

$$\int f_n \, \mathrm{d}\mu \geq (1-\varepsilon)\mu(A_n), \quad \bigcup A_n = A.$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int f_n \, \mathrm{d}\mu \geq (1-\varepsilon)\mu(A)$．$\varepsilon > 0$ は任意だった． □

定理 6.4.3 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．

(1)（単調収束定理）非負値可積分関数の増大列 $\{f_n\}$ に対し，

$$\int(\lim_{n\to\infty} f_n) \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

(2)（ファトウの補題）非負値可積分関数列 $\{f_n\}$ に対し，

$$\int(\liminf f_n) \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

(3)（優収束定理）可測関数列 $\{f_n\}$ が関数 f に各点収束し，可積分関数 g が存在して $|f_n| \leq g$ となるならば，f_n, f も可積分で，

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

証明 (1) $\geq$ は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n \geq f_n$ の両辺の積分を取る．$\leq$ は補題 6.4.1 より，

(2) $g_n = \inf\{f_k \mid k \geq n\}$ に単調収束定理を適用．

(3) $2g - |f - f_n|$ にファトウの補題を適用． □

定義 6.4.3 測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ が **有限** であるとは，$\mu(\Omega) < \infty$ であること．σ **有限** であるとは，Ω が測度有限な可測集合の可算和であること．

ルベーグ測度は σ 有限である．

定理 6.4.4 σ 有限測度空間 $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ に対し，$\Omega_1 \times \Omega_2$ 上の可算加法族で $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ の元の直積を含む最小のものを $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ とすると，この上の測度 $\mu_1 \otimes \mu_2$ で $\mu_{12}(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$ $(A_i \in \mathcal{F}_i)$ をみたすものが一意的に存在する．

定理 6.4.5（フビニの定理）σ 有限測度空間 $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ と $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ 上の可積分関数 f に対し，次が成立する．

(1) ほとんどすべての $x_1 \in \Omega_1$ に対し，$f(x_1, \cdot)$ は Ω_2 上可積分であり，ほとんどすべての $x_2 \in \Omega_2$ に対し，$f(\cdot, x_2)$ は Ω_1 上可積分である．

(2) $\displaystyle F_1(x_1) = \int_{\Omega_2} f(x_1, \cdot) \, \mathrm{d}\mu_2$, $\displaystyle F_2(x_2) = \int_{\Omega_1} f(\cdot, x_2) \, \mathrm{d}\mu_1$ はそれぞれ Ω_1, Ω_2 上の可積分関数を与え，

$$\int_{\Omega_1} \mathrm{d}\mu_1 \int_{\Omega_2} f \, \mathrm{d}\mu_2 = \int_{\Omega_2} \mathrm{d}\mu_2 \int_{\Omega_1} f \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2).$$

定理 6.4.6（フビニ＝トネリの定理）σ 有限測度空間 $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ と $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ 上の可測関数 f に対し，

$$\int_{\Omega_1} \mathrm{d}\mu_1 \int_{\Omega_2} |f| \, \mathrm{d}\mu_2 < \infty$$

ならば，f は可積分で，

$$\int_{\Omega_1} \mathrm{d}\mu_1 \int_{\Omega_2} f \, \mathrm{d}\mu_2 = \int_{\Omega_2} \mathrm{d}\mu_2 \int_{\Omega_1} f \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2).$$

6.4.2 L^p 空間

実数 $p \geq 1$ に対し測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上 p 乗可積分関数（L^p 関数），すなわち

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{L^p} := \left(\int |u|^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} < \infty$$

である実または複素数値関数全体のなすベクトル空間を $L^p(\Omega)$ とする．ただしほとんどいたるところ，すなわち零集合を除いて一致する関数どうしは同一視する．ミンコフスキーの不等式・ヘルダーの不等式は測度空間上の可積分関数に対しても成立している．特に $\|\cdot\|_{L^p}$ はノルムである．

定理 6.4.7 (1) $1 \leq p < \infty$ に対し，$L^p(\Omega)$ におけるコーシー列は，$L^p(\Omega)$ に属する関数にほとんどいたるところ収束するような部分列をもつ．
(2) $1 \leq p < \infty$ に対し，$L^p(\Omega)$ はバナッハ空間である．

証明 $\{f_n\}$ を $L^p(\Omega)$ におけるコーシー列とする．部分列 $\{f_{m(k)}\}$ を，$n \geq m(k)$ ならば $\|f_n - f_{m(k)}\|_{L^p} \leq 2^{-k}$ となるように取る．

$$g_n = |f_{m(1)}| + \sum_{i=1}^{n-1} |f_{m(i+1)} - f_{m(i)}| \in L^p(\Omega)$$

とおくと，$\{g_n\}$ は非負値増大列．よって単調収束定理より，

$$\|\lim g_n\|_{L^p} = \lim \|g_n\|_{L^p} \leq \|f_{m(1)}\|_{L^p} + 1.$$

よって $\{g_n\}$ はほとんどいたるところ有限値に収束する．極限を g とすると，$g \in L^p(\Omega)$．よって

$$f_{m(n)} = f_{m(1)} + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{m(i+1)} - f_{m(i)})$$

はほとんどいたるところ絶対収束し，極限 f は p 乗可積分．

$|f_{m(k)}| \leq g$ なので，優収束定理より，$\|f_{m(k)} - f\|_{L^p} \to 0$．$\{f_n\}$ はコーシー列なので $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$ を得る． □

測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上の可測関数 f に対し，実数 a が f の **本質的上界** で

あるとは，$\{x \in \Omega \mid f(x) > a\}$ が零集合であることである．f の本質的上界の最小値を f の **本質的上限** という．

$|f|$ の本質的上界が存在するとき，f は **本質的に有界** であるという．Ω 上の本質的有界関数全体のなすベクトル空間を $L^\infty(\Omega)$ とする．本質的有界関数 f に対し，$|f|$ の本質的上限を $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_{L^\infty}$ で表す．これは $L^\infty(\Omega)$ 上のノルムである．

定理 6.4.8 (1) $L^\infty(\Omega)$ のコーシー列は $L^\infty(\Omega)$ に属する関数にほとんどいたるところ収束する．
(2) $L^\infty(\Omega)$ はバナッハ空間である．

証明 $\{f_n\}$ を $L^\infty(\Omega)$ におけるコーシー列とする．任意の自然数 k に対し，自然数 N_k が存在して，任意の $m, n \geq N_k$ に対し，$\|f_m - f_n\|_{L^\infty} \leq \dfrac{1}{k}$．ゆえに零集合 E_k が存在して，任意の $x \in \Omega \setminus E_k$ と任意の $m, n \geq N_k$ に対し，$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \dfrac{1}{k}$．$E = \bigcup E_k$ も零集合で，任意の $x \in \Omega \setminus E$ に対し，$\{f_n(x)\}$ はコーシー列．よって極限 $f(x)$ に収束する．$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \dfrac{1}{k}$ において $n \to \infty$ とすると $|f_m(x) - f(x)| \leq \dfrac{1}{k}$．よって $f \in L^\infty(\Omega)$ で，$\|f_m - f\|_{L^\infty} \to 0$. □

ヘルダーの不等式（定理 7.2.3）より次が従う．

定理 6.4.9 $p, q, r \in [1, \infty], 0 < \theta < 1, \dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{p} + \dfrac{\theta}{r}$ に対し，

$$\|u\|_{L^q} \leq {\|u\|_{L^p}}^{1-\theta} {\|u\|_{L^r}}^{\theta} \quad (u \in L^p \cap L^r).$$

よって $L^p \cap L^r \subset L^q$．特に，任意の $q \in [1, \infty]$ に対し，$L^1 \cap L^\infty \subset L^q$．

定理 6.4.10 $\mu(\Omega) < \infty,\ 1 \leq p \leq q \leq \infty$ ならば $L^p(\Omega) \supset L^q(\Omega)$ である．

証明 $\dfrac{p}{q} + \dfrac{1}{r} = 1$ とおくと，ヘルダーの不等式より，
$\|u\|_{L^p}^p = \||u|^p\|_{L^1} \leq \|1\|_{L^r} \|(u^p)^{q/p}\|_{L^{q/p}} = \mu(\Omega)^{1/r} \|u\|_{L^q}^p$. □

定理 6.4.2 より次が従う．

定理 6.4.11 $p \in [1, \infty)$ に対し，$C_0(\mathbb{R}^n)$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ で稠密である．

$p = \infty$ に対しては成立しない．定数関数 $1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ と $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ に対し，$\|f - 1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \geq 1$ である．

ルベーグ測度に対する可測集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対し，Ω 上の可測関数で任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ 上 p 乗可積分であるもの全体のなすベクトル空間を $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ とする．$L^\infty(\Omega) \subset L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ である．

6.4.3 L^p 関数の掛算と一様有界性定理

ヘルダーの不等式より次が従う.

定理 6.4.12 $p, q, r \in [1, \infty]$, $q^{-1} = p^{-1} + r^{-1}$ に対し, $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^r(\Omega)$ ならば $uv \in L^q(\Omega)$ であって,

$$\|uv\|_{L^q} \leq \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^r}$$

定理 6.4.13 Ω を σ 有限な可測集合, $\mu(\Omega) > 0$ とする. $p \in [1, \infty)$, $f \in L^\infty(\Omega)$ に対し, 掛算作用素 $T : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$, $T(u) = fu$ は有界作用素で, $\|T\| = \|f\|_{L^\infty}$.

証明 $\|T\| \leq \|f\|_{L^\infty}$ は定理 6.4.12 より.

$0 < a < \|f\|_{L^\infty}$ に対し, 可測集合 $\Omega_a \subset \Omega$ が存在して, $|f(x)| > a$ $(x \in \Omega_a)$, $0 < \mu(\Omega_a) < \infty$. $\chi_a(x) = 1$ $(x \in \Omega_a)$, $\chi_a(x) = 0$ $(x \notin \Omega_a)$ とすると,

$a\mu(\Omega_a) \leq \|f\chi_a\|_{L^p} \leq \|T\|\,\mu(\Omega_a)$. ゆえに $\|T\| \geq a$. □

次の定理はハーン＝バナッハの定理・開写像定理・閉グラフ定理と並んでよく用いられる.

定理 6.4.14（一様有界性定理）バナッハ空間 X からノルム空間 Y への有界作用素の族 $\mathcal{F}$ が,「任意の $x \in X$ に対し, $\{Tx \mid T \in \mathcal{F}\}$ が有界」という条件をみたすならば, $\{\|T\| \mid T \in \mathcal{F}\}$ は有界である.

証明 $\{\|T\| \mid T \in \mathcal{F}\}$ が有界でないとすると, $\mathcal{F}$ 上の列 $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で $\|T_n\| \geq 8^n$ をみたすものが取れる.. これに対し, X 上の列 $\{x_n\}$ で,

$$\|T_n x_n\| \geq \frac{2}{3}\|T_n\|\,\|x_n\|, \quad \|x_n\| = 4^{-n}$$

をみたすものが取れる. X の完備性により $y = \sum_{n=1}^\infty x_n$ は収束する.

$\|T_n y\| \geq \|T_n(x_1 + \cdots + x_n)\| - \|T_n(\sum_{k>n} x_k)\|$ の右辺を評価する.

$\|a\| \leq \frac{1}{2}(\|b+a\| + \|b-a\|) \leq \max\{\|b+a\|, \|b-a\|\}$ より, 必要なら x_n を -1 倍して, $\|T_n(x_1 + \cdots + x_n)\| \geq \|T_n x_n\|$ としてよい. また, $\|T_n(\sum_{k>n} x_k)\| \leq \sum_{k>n} \|T_n\|\,\|x_k\| = \frac{4^{-n}}{3}\|T_n\|$. したがって,

$$\begin{aligned}\|T_n y\| &\geq \|T_n x_n\| - \frac{4^{-n}}{3}\|T_n\| \\ &\geq \frac{2}{3}\|T_n\|\,\|x_n\| - \frac{4^{-n}}{3}\|T_n\| = \frac{4^{-n}}{3}\|T_n\| \geq \frac{2^n}{3} \to \infty.\end{aligned}$$ □

ここで紹介した証明は, ソーカル事件で有名なアラン・ソーカルによるもの.

一様有界性定理を用いて次が示される.

定理 6.4.15 $p \in [1, \infty]$ とし, σ 有限な測度空間 Ω 上の可測関数 f が,

「任意の $u \in L^p(\Omega)$ に対し $fu \in L^p(\Omega)$」

という条件をみたすならば，$f \in L^\infty(\Omega)$ である．

証明 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$f_n(x) = f(x)$ $(|f(x)| \le n)$, $f_n(x) = 0$ $(|f(x)| > n)$ とおくと，$f_n \in L^\infty$, $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^\infty} = \|f\|_{L^\infty}$.

$T_n : L^p \to L^p, T_n(u) = f_n u$ とすると，T_n は有界作用素で，定理 6.4.13 より，$\|T_n\| = \|f_n\|_{L^\infty}$.

$\|T_n u\|_{L^p} \le \|fu\|_{L^p}$ なので，一様有界性定理より，$M > 0$ が存在して，任意の n に対し，$\|T_n\| \le M$. ゆえに $\|f_n\|_{L^\infty} \le M$. よって $\|f\|_{L^\infty} \le M$. □

6.4.4 バナッハ空間の双対

ノルム空間 X に対し $B_X = \{x \in X \mid \|x\| \le 1\}$ とおく．

ノルム空間 X 上の有界線型汎関数全体のなすベクトル空間を X の **双対空間** といい，X' と書く．$x \in X$, $f \in X'$ に対し，$\langle f, x\rangle = f(x)$ と書く．X' は作用素ノルム $\|f\| = \sup\{|\langle f, x\rangle| \mid \|x\| = 1\}$ によってバナッハ空間になる．

集合 F からベクトル空間 V 上の線型汎関数全体の集合への写像が与えられているとき，V 上の位相で，F の元に対応する線型汎関数をすべて連続にする最弱のものを $\sigma(V, F)$ で表す．

ノルム空間 X に対し，X' 上の位相 $\sigma(X', X)$ について考察する．これは作用素ノルムによる位相より弱い．

定理 6.4.16 (1) 位相 $\sigma(X', X)$ はハウスドルフである．
(2)（バナッハ＝アラオグル＝ブルバキ）位相 $\sigma(X', X)$ に関して $B_{X'}$ はコンパクトである．よって閉集合である．

証明 実ノルム空間の場合の証明を述べる．
(1) $f_1, f_2 \in X'$, $f_1 \ne f_2$ とすると，$x \in X$ が存在して $\langle f_1, x\rangle < \langle f_2, x\rangle$.
$a = \dfrac{1}{2}\langle f_1 + f_2, x\rangle$ とおくと，

$$f_1 \in \{f \in X' \mid \langle f, x\rangle < a\}, \quad f_2 \in \{f \in X' \mid \langle f, x\rangle > a\}.$$

(2) 積空間 $K = \prod_{x\in X} [-\|x\|, \|x\|]$ はチホノフの定理よりコンパクトである．単射 $B_{X'} \to K$, $f \mapsto (\langle f, x\rangle)_{x\in X}$ は位相 $\sigma(X', X)$ に関して像への同相で，さらに像が閉集合であることを示すことができる． □

X の元は X' 上の有界線型汎関数を与える．これは線型写像 $j : X \to X''$ を定める．

定理 6.4.17 $j : X \to X''$ は等長的，すなわち $\|j(x)\| = \|x\|$ $(x \in X)$.

証明 $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$ とすると，任意の $f \in X'$ に対し，$|\langle f, x_0\rangle| \le \|f\|$. よって $\|j(x_0)\| = \sup\{|\langle f, x_0\rangle| \mid \|f\| = 1\} \le 1$.

x_0 を含む 1 次元部分空間上の線型汎関数 f_0 を $\langle f_0, x_0\rangle = 1$ で定義する．

$|\langle f_0, x_0\rangle| \le \|x_0\|$ なので，ハーン＝バナッハの定理 6.3.2 より，$f_0 \in X'$ で $|\langle f_0, x_0\rangle| \le \|x\|$ $(x \in X)$ をみたすものに拡張される．このとき $\|f_0\| = 1$ である．よって $\sup\{|\langle f, x_0\rangle| \mid \|f\| = 1\} \ge 1$．したがって $\|j(x_0)\| = 1$． □

定理 6.4.18 (1) X がバナッハ空間であるとき，$j(B_X)$ は閉集合である．
(2) X'' 上の位相 $\sigma(X'', X')$ に対し，$j(B_X)$ は $B_{X''}$ で稠密である．

証明 (1) $j(B_X)$ 上の列 $\{j(x_n)\}$ で $\xi \in X''$ に収束するものを取る．j が等長的なので，$\{x_n\}$ は B_X 上のコーシー列，よってある $x \in B_X$ に収束する．このとき $\xi = j(x) \in j(B_X)$．
(2) X が実ノルム空間である場合の証明を述べる．$\xi \in B_{X''}$ とし，$\varepsilon > 0$，有限集合 I と $f_i \in X'$ $(i \in I)$ に対し，$U = \{\eta \in X'' \mid |\langle \eta - \xi, f_i\rangle| \le \varepsilon\ (i \in I)\}$ とおく．$j(B_X) \cap U = \varnothing$ と仮定して矛盾を導く．このとき $\mathbb{R}^n$ の凸集合

$$C_1 = \{(\langle f_i, x\rangle)_{i\in I} \in \mathbb{R}^n \mid x \in B_X\},$$
$$C_2 = \{(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^n \mid |u_i - \langle \xi, f_i\rangle| < \varepsilon\ (i \in I)\}$$

の交わりは空集合．よって $\mathbb{R}^n$ の超平面によって C_1, C_2 を分離できる．すなわち，$(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ が存在して，任意の $x \in B_X$ に対し，

$$\sum_{i=1}^n a_i \langle f_i, x\rangle < \sum_{i=1}^n a_i \langle \xi, f_i\rangle - \varepsilon \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

よって $\left\|\sum_{i=1}^n a_i f_i\right\| < \left\langle \xi, \sum_{i=1}^n a_i f_i \right\rangle$．これは $\xi \in B_{X''}$ に矛盾する． □

定義 6.4.4 (1) バナッハ空間 X に対し $j : X \to X''$ が全射であるとき，X は **反射的** であるという．このとき j はノルム空間として同型である．
(2) ノルム空間 X が **一様凸** であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して，任意の $x, y \in B_X$ に対し，$\|x - y\| > \varepsilon$ ならば $\left\|\frac{1}{2}(x + y)\right\| < 1 - \delta$ がなりたつこと．

定理 6.4.19 一様凸バナッハ空間は反射的である．

証明 実の場合の証明を述べる．一様凸バナッハ空間 X に対し，$\xi \in X''$，$\|\xi\| = 1$ とする．$j(B_X)$ は閉集合なので，任意に取った $\varepsilon > 0$ に対し，$x \in X$ が存在して $\|\xi - j(x)\| \le \varepsilon$ となることを言えばよい．

任意に取った $\delta > 0$ に対し，$f \in X'$ を $\|f\| = 1$, $\langle \xi, f\rangle > 1 - \dfrac{\delta}{2}$ となるように取ることができる．

$U = \left\{\eta \in X'' \mid |\langle \eta - \xi, f\rangle| < \dfrac{\delta}{2}\right\}$ とおくと，定理 6.4.18 (2) より，$x_1 \in B_X \cap j^{-1}(U)$ が存在する．このとき $\|\xi - j(x_1)\| > \varepsilon$ と仮定して矛盾を導く．

$\{\eta \in X'' \mid \|\eta - j(x_1)\| \le \varepsilon\}$ は位相 $\sigma(X'', X')$ に関して閉集合．その補集

合を V とおくと $\xi \in V$．よって定理 6.4.18 (2) より，$x_2 \in B_X \cap j^{-1}(U \cap V)$ が存在する．x_1, x_2 は $|\langle f, x_i\rangle - \langle \xi, f\rangle| < \dfrac{\delta}{2}$ $(i = 1, 2)$ をみたすので，$\left|\left\langle f, \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2)\right\rangle - \langle \xi, f\rangle\right| < \dfrac{\delta}{2}$．よって $\|f\| = 1$ より，

$$\left\|\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right\| \geq \left\langle f, \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right\rangle > \langle \xi, f\rangle - \frac{\delta}{2} > 1 - \delta.$$

一方 $j : X \to X''$ が等長的であることから，$\|x_2 - x_1\| > \varepsilon$．これは X が一様凸であることに矛盾する． □

6.4.5 角谷の定理

次に，ノルム空間 X 上の位相 $\sigma(X, X')$ について考察する．これはノルムによる位相より弱い．

定理 6.4.20 ノルム空間 X 上の位相 $\sigma(X, X')$ はハウスドルフである．

証明 実ノルム空間の場合の証明を述べる．

$x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ に対し，$x_1 - x_2$ を含む 1 次元部分空間上の線型汎関数 f_0 を $\langle f_0, x_1 - x_2\rangle = \|x_1 - x_2\|$ で定義する．ハーン＝バナッハの定理 6.3.2 より，f_0 を X 全体に，$\langle f_0, x\rangle \leq \|x\|$ をみたすように拡張できる．$a = \dfrac{1}{2}\langle f_0, x_1 + x_2\rangle$ とおくと，$x_1 \in \{x \in X \mid \langle f_0, x\rangle > a\}$, $x_2 \in \{x \in X \mid \langle f_0, x\rangle < a\}$． □

定理 6.4.21 ノルム空間 X の凸閉集合 C は，位相 $\sigma(X, X')$ に関しても閉集合である．

証明 $x_0 \in X \setminus C$ とする．ハーン＝バナッハの定理 6.3.2 より，$f \in X'$, $a \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $y \in C$ に対し，$\langle f, x_0\rangle > a > \langle f, y\rangle$．よって $\{x \in X \mid \langle f, x\rangle > a\}$ は，x_0 を含み C と交わらない． □

定理 6.4.22 (1) ノルム空間の間の有界作用素 $T : X \to Y$ は，位相 $\sigma(X, X')$, $\sigma(Y, Y')$ に関して連続である．
(2) バナッハ空間の間の線型写像 $T : X \to Y$ が位相 $\sigma(X, X')$, $\sigma(Y, Y')$ に関して連続ならば，T は有界作用素である．

証明 (1) $f \in Y'$ ならば $f \circ T \in X'$．
(2) T のグラフ $\{(x, Tx) \mid x \in X\}$ は $X \times Y$ において $\sigma(X, X')$, $\sigma(Y, Y')$ の積位相に関して閉．ゆえにノルムに関しても閉．よって閉グラフ定理 6.3.9 より T は有界． □

定理 6.4.23（角谷）バナッハ空間 X に対し，X が反射的であることと B_X が位相 $\sigma(X, X')$ に関してコンパクトであることは同値である．

証明 X が反射的であるとする．このとき $j(B_X) = B_{X''}$．

定理 6.4.16 (2) より，$B_{X''}$ は位相 $\sigma(X'', X')$ に関してコンパクト．よって $j^{-1}: X'' \to X$ が位相 $\sigma(X'', X'), \sigma(X, X')$ に関して連続であることを示せばよい．これは，任意の $f \in X'$ に対し，X'' 上の線型汎関数 $f \circ j^{-1}$ は，f が与える X'' 上の線型汎関数に一致するので，位相 $\sigma(X'', X')$ に関して連続であることから言える．

逆に，B_X が位相 $\sigma(X, X')$ に関してコンパクトであるとする．

定理 6.4.22 (1) より，$j: X \to X''$ は位相 $\sigma(X, X'), \sigma(X'', X''')$ に関して連続．よって $j(B_X)$ は位相 $\sigma(X'', X''')$ に関してコンパクトで，したがってより弱い位相である $\sigma(X'', X')$ に関してもコンパクトで，X'' の閉集合になる．

一方，定理 6.4.18 より $j(B_X)$ は位相 $\sigma(X'', X')$ に関して $B_{X''}$ で稠密．したがって $j(B_X) = B_{X''}$．よって X は反射的． □

定理 6.4.24 反射的バナッハ空間の閉部分空間は反射的である．

証明 反射的バナッハ空間 X とその閉部分空間 Y に対し，$B_Y = B_X \cap Y$．

角谷の定理 6.4.23 より，B_X は位相 $\sigma(X, X')$ に関してコンパクト．定理 6.4.21 より，Y は位相 $\sigma(X, X')$ に関しても閉集合．よって B_Y は位相 $\sigma(X, X')$ の制限に関してコンパクトだが，この位相は B_Y 上で位相 $\sigma(Y, Y')$ に一致する．よって再び角谷の定理 6.4.23 より，Y は反射的． □

定理 6.4.25 バナッハ空間 X に対し，X が反射的であることと X' が反射的であることは同値である．

証明 X が反射的であるとすると，定理 6.4.16 (2) と合わせて，$B_{X'}$ は位相 $\sigma(X', X'')$ に関してコンパクト．よって角谷の定理 6.4.23 より，X' は反射的．

X' が反射的であるとすると，X'' も反射的．X は X'' の閉部分空間にノルム空間として同型なので，定理 6.4.24 より X も反射的． □

6.4.6 L^p 空間の双対

定理 6.4.26 $2 \le p < \infty$ に対し，$L^p(\Omega)$ は一様凸である．

証明 $a > 0,\ b > 0$ に対し，

$$a^p + b^p \le (a^2 + b^2)^{p/2} = \left(\frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}\right)^{p/2} \le \frac{(a+b)^p + (a-b)^p}{2}.$$

これを用いて，$f, g \in B_{L^p(\Omega)}$ に対し，

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|^p \le 1$$

が示される．これから結論が従う． □

定理 6.4.27 $1 < p < \infty$ に対し，$L^p(\Omega)$ は反射的である．

証明 実数値関数の場合の証明を述べる．

定理 6.4.19, 6.4.26 より，$2 \le p < \infty$ の場合はすでに示されている．

$1 < p < 2$ とする．$q = \dfrac{p}{p-1}$ とおくと，$p^{-1} + q^{-1} = 1$，$2 < q < \infty$．

ヘルダーの不等式より，$u \in L^p$ に対して L^q 上の有界線型汎関数 $f \mapsto \displaystyle\int uf\,\mathrm{d}\mu$ が定まる．これを $Tu \in (L^q)'$ とすると，ヘルダーの不等式

$$|\langle Tu,\, f\rangle| \le \|u\|_{L^p}\|f\|_{L^q}$$

より，$\|Tu\|_{(L^q)'} \le \|u\|_{L^p}$．

$f_0 = |u|^{p-2}u$ とおくと，$|f_0|^q = |u|^p$ なので，

$$f_0 \in L^q, \quad \|f_0\|_{L^q}^q = \|u\|_{L^p}^p, \quad \|f_0\|_{L^q} = \|u\|_{L^p}^{p-1} \quad \left(\frac{p}{q} = p-1\right).$$

ゆえに $\langle Tu,\, f_0\rangle = \|u\|_{L^p}^p = \|u\|_{L^p}\|f_0\|_{L^q}$．よって $\|Tu\|_{(L^q)'} \ge \|u\|_{L^p}$ も言えるので，$\|Tu\|_{(L^q)'} = \|u\|_{L^p}$．

したがって $T : L^p \to (L^q)'$ は等長的で，L^p が完備なので像は閉集合．L^q は反射的なので，定理 6.4.25 より $(L^q)'$ は反射的．よって定理 6.4.24 より L^p は反射的． □

実は $1 < p < 2$ のときも $L^p(\Omega)$ は一様凸である．

定理 6.4.28（リースの表現定理）$p,\, q \in (1, \infty)$，$p^{-1} + q^{-1} = 1$ とする．$T : L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)'$ を $\langle Tu,\, f\rangle = \displaystyle\int uf\,\mathrm{d}\mu$ で定義すると，T は全射等長である．

証明 前定理の証明より，T は $(L^p)'$ の閉部分空間の上への等長写像である．よって像が稠密であることを言えばよい．

そこで，$g \in (L^p)'' = L^p$ がすべての $u \in L^q$ に対し，$\langle Tu,\, g\rangle = 0$ をみたすとして，$g = 0$ を示せばよい．$u = |g|^{p-2}g$ とおくと $\|g\|_{L^p} = 0$ が従う． □

定理 6.4.29 σ 有限な可測集合 Ω に対し，$T : L^\infty(\Omega) \to L^1(\Omega)'$ を $\langle Tu,\, f\rangle = \displaystyle\int uf\,\mathrm{d}\mu$ で定義すると，T は全射等長である．

証明 $\Omega_n \subset \Omega$ を，$0 < \mu(\Omega_n) < \infty$, $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \Omega$ となるように取る．$\chi_n(x) = 1\ (x \in \Omega_n)$, $\chi_n(x) = 0; (x \notin \Omega_n)$ とおく．

数列 $h_n > 0$ および $h \in L^2(\Omega)$ を，$h(x) = h_1\ (x \in \Omega_1)$, $h(x) = h_n\ (x \in \Omega_n \setminus \Omega_{n-1},\ n \ge 2)$ となるように取る．

$\varphi \in (L_1)'$ に対し，$\psi \in (L^2)'$ を $\langle \psi,\, g\rangle = \langle \varphi,\, hg\rangle$ で定める．リースの表現定理 6.4.28 より，$v \in L^2$ が存在して，$\langle \psi,\, g\rangle = \displaystyle\int vg\,\mathrm{d}\mu$.

$u = vh^{-1}$ とおくとこれは可測で，$f \in L^1$ に対し，

$$\int uf \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int \frac{v}{h} \chi_n f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \langle \psi, \frac{\chi_n f}{h} \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \varphi, \chi_n f \rangle$$
$$= \langle \varphi, f \rangle.$$

$uf_1 = |uf|, |f_1| = |f|$ とすると，$f_1 \in L^1$, $\|uf\|_{L^1} = \langle \varphi, f_1 \rangle$ なので $uf \in L^1$.

ゆえに定理 6.4.15 より，$u \in L^\infty$.

$T : L^1 \to L^1, Tf = uf$ とおくと，定理 6.4.13 より，

$$\|u\|_{L^\infty} = \|T\| = \sup_{\|f\|_{L^1}=1} \|uf\|_{L^1} = \sup_{\|f\|_{L^1}=1} \langle \varphi, f_1 \rangle = \|\varphi\|.$$ □

6.4.7 L^1, L^∞ の特殊性

$1 \le p \le \infty$ に対し，測度空間 X 上の実数値関数に関する L^p 空間 $L^p(X)$ を考える．$f, g \in L^p(X)$ に対し，ほとんどすべての点 x で $f(x) \le g(x)$ がなりたつとき，$f \le g$ であると定義すると，$L^p(X)$ は順序集合になる．$f, g \in L^p(X)$ に対し，ほとんどすべての点 x に対して

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

とすることにより，$f \vee g \in L^p(X)$ を定義する．このようにして関数であったことの痕跡を順序構造の形でバナッハ空間上に残すのである．

$L^1(X)$, $L^\infty(X)$ はこの順序に関して特別な性質をもっている．

定理 6.4.30 (1) $f, g \in L^1(X)$, $f \ge 0$, $g \ge 0$ に対し，

$$\|f + g\|_{L^1} = \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}.$$

(2) $f, g \in L^\infty(X)$, $f \ge 0$, $g \ge 0$ に対し，

$$\|f \vee g\|_{L^\infty} = \max\{\|f\|_{L^\infty}, \|g\|_{L^\infty}\}.$$

第 7 章

ソボレフ空間

関数の大きさを測る物差しは多様である．絶対値を何乗かしたものを積分する，上限を見る，導関数の大きさも勘定に入れるなど，目的に応じていろいろな物差しを使い分ける．そこで，異なる物差しで測った異なる種類の大きさの間の関係が問題になる．このとき，2 つの物差しではなく，まず 3 つの物差しの関係に着目する．それが，2 つの物差しで測った大きさによってもう一つの物差しで測った大きさを評価する補間不等式である．

補間不等式においては，空間の拡大／縮小に対して関数の大きさがどのように反応するかがポイントになる．空間の拡大／縮小によって逆転するような不等式は，物差しどうしの比較には使えないからである．

7.1　ヘルダー空間

7.1.1　ヘルダー半ノルム

開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $u \in C^m(U)$ に対し，

$$|u|_{H(m)} = |u|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha|=m} \sup\{|\partial^\alpha u(\boldsymbol{x})| \mid \boldsymbol{x} \in U\} \in [0, \infty]$$

とおく．$|\alpha| = 0$ の場合は $\partial^\alpha u = u$ と解釈する．U を明示したい場合は $|\cdot|_{H(m),U}$, $|\cdot|_{m,\infty,U}$ と書く．この記法は以下で定義する半ノルムに対しても用いる．

任意の $0 \leq k \leq m$ に対し $|u|_{H(k)} < \infty$ となる u 全体のなす $C^m(U)$ の部分空間を $C^{m,0}(U)$ とし，$C^{m,0}(\overline{U}) = C^m(\overline{U}) \cap C^{m,0}(U)$ とする．$\overline{U}$ がコンパクトならば $C^{m,0}(\overline{U}) = C^m(\overline{U})$ である．

$0 \leq k \leq m$ に対し，$|\cdot|_{H(k)}$ は $C^{m,0}(U)$ 上の半ノルムである．

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{k=0}^{m} |u|_{k,\infty}$$

とおくと，これは $C^{m,0}(U)$ 上のノルムであり，$C^{m,0}(U)$ はバナッハ空間になる．

また，$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 0 < h \leq 1, u \in C^m(U)$ に対し，

$$|u|_{H(m,h)} = \sum_{|\alpha|=m} \sup \left\{ \frac{|\partial^\alpha u(\boldsymbol{x}) - \partial^\alpha u(\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^h} \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \right\}$$

とおく．$|u|_{H(m,h)} < \infty$ となる u 全体のなす $C^{m,0}(U)$ の部分空間を $C^{m,h}(U)$ とし，$C^{m,h}(\overline{U}) = C^{m,0}(\overline{U}) \cap C^{m,h}(U)$ とする．$|\cdot|_{H(m,h)}$ は $C^{m,h}(U)$ 上の半ノルムである．これを **ヘルダー半ノルム** という．

$0 < h < 1$ のときは，$|\cdot|_{H(m,h)}$ を $|\cdot|_{H(m+h)}$，$|\cdot|_{m+h,\infty}$ と書き，$C^{m,h}$ を $C^{m+h,0}$ と書く．

$$\|u\|_{m+h,\infty} = \|u\|_{m,\infty} + |u|_{H(m,h)}$$

とおくと，これは $C^{m,h}(U)$ 上のノルムであり，$C^{m,h}(U)$ はバナッハ空間になる．$C^{m,h}(\overline{U})$ はその閉部分空間である．$C^{m,h}(U)$, $C^{m,h}(\overline{U})$ を **ヘルダー空間** という．

U 上の関数 u は，$|u|_{H(0,h)} < \infty$ であるとき u は指数 h の **ヘルダー連続関数** であるという．特に $h = 1$ のとき **リプシッツ連続関数** であるという．

$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 0 \leq h < h' \leq 1$ に対し，

$$C^{m,0}(U) \supset C^{m,h}(U) \supset C^{m,h'}(U) \supset C^{m,1}(U) \supset C^{m+1,0}(U).$$

$C^{m+1,0}(U) \subsetneq C^{m,1}(U)$ である．しかし次のことは言える．

定理 7.1.1 $C^{m+1,0}(U) = C^{m+1}(U) \cap C^{m,1}(U)$.

証明 微分の定義より，$|u|_{H(1)} \leq n\,|u|_{H(0,1)}$．また平均値の定理より，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ を結ぶ線分上の点 $\boldsymbol{z}$ が存在して，$u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j u(\boldsymbol{z})(x_j - y_j)$．よって定数 C' が存在して，$|u|_{H(0,1)} \leq C'|u|_{H(1)}$ もなりたつ．よって $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，定数 C が存在して，$C^{-1}|u|_{H(m+1)} \leq |u|_{H(m,1)} \leq C|u|_{H(m+1)}$．□

7.1.2 ヘルダー空間の間のコンパクト埋めこみ

定義 7.1.1 距離空間 (X, d) が **全有界** であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$x_1, \ldots, x_n \in X$ が存在して，$X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$．ここで $B(x, \varepsilon)$ は x の ε 近傍．$x_1, \ldots, x_n$ を X の ε **網** という．

定理 7.1.2 距離空間が全有界であることは，任意の点列がコーシー部分列を含むことに同値である．

証明 距離空間 (X, d) が全有界でないとすると，$\varepsilon > 0$ が存在して，X は有限個の

ε 開球で覆えない．よって X 上の点列 $\{x_n\}$ が存在して，$d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ $(i \neq j)$ をみたす．この点列はコーシー部分列を含まない．

(X, d) が全有界であるとすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，X は有限個の ε 開球で覆われるので，X 上の任意の点列は，ある ε 開球に含まれる部分列をもつ．

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を X 上の点列とする．このとき，$\{x_n\}$ の部分列 $\{x_n^{(1)}\}$，その部分列 $\{x_n^{(2)}\}$，その部分列 $\{x_n^{(3)}\}$，と順に取っていき，$\{x_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $1/k$ 開球に含まれるようにすることができる．このとき $\{x_n^{(n)}\}$ はコーシー列である．□

定理 7.1.3 完備距離空間の X の部分集合 A に対し，次の条件はたがいに同値である．

(1) A 上の任意の点列は，X において収束する部分列をもつ．

(2) X で相対コンパクト，すなわち A を含む X のコンパクト集合が存在する．

(3) A は全有界．

コンパクト・ハウスドルフ空間 K 上の実または複素数値連続関数全体のなすベクトル空間を $C(K)$ とする．$C(K)$ 上のノルムを $\|u\|_\infty = \sup\{u(x) \mid x \in K\}$ で定義すると，$C(K)$ はバナッハ空間になる．このノルムに関する収束は一様収束に他ならない．

アスコリ＝アルツェラの定理 6.2.1 は次のように拡張される．

定理 7.1.4 コンパクト・ハウスドルフ空間 K に対し，$A \subset C(K)$ が相対コンパクトであるのは，次の 2 条件が成立することと同値である．

(1) A は有界．

(2) A は K の各点 x で同程度連続．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，x の近傍 $V_{x,\varepsilon}$ が存在して，任意の $u \in A, y \in V_{x,\varepsilon}$ に対し，$|u(x) - u(y)| < \varepsilon$.

証明 定理 6.2.1 より，(1) (2) から A が相対コンパクトであることが言える．

A が相対コンパクトであるとする．A が有界であることはあきらか．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，A の ε 網 $u_1, \ldots, u_n \in A$ を取る．

任意の $x \in K$ に対し，x の近傍 $W_{x,\varepsilon}$ が存在して，$y \in W_{x,\varepsilon}$ ならば $|u_j(x) - u_j(y)| < \varepsilon$ $(j = 1, \ldots, n)$．任意の $u \in A$ に対し，j が存在して $\|u - u_j\|_\infty < \varepsilon$．よって，

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u_j(x)| + |u_j(x) - u_j(y)| + |u_j(y) - u(y)| < 3\varepsilon.$$

A の同程度連続性が言えた．□

定理 7.1.5 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界開集合とする．

(1) $0 < h \leq 1$ に対し，埋めこみ写像 $C^{m,h}(\overline{\Omega}) \subset C^{m,0}(\overline{\Omega})$ はコンパクト作用素である．

(2) $0 < h < h' \leq 1$ に対し，埋めこみ写像 $C^{m,h'}(\overline{\Omega}) \subset C^{m,h}(\overline{\Omega})$ はコンパク

ト作用素である．

証明 $m=0$ の場合に帰着される．
(1) $C^{0,h}(\overline{\Omega})$ の有界集合は，同程度連続かつ $C^{0,0}(\overline{\Omega})$ において有界である．よってアスコリ＝アルツェラの定理 6.2.1 より，$C^{0,h}(\overline{\Omega}) \subset C^{0,0}(\overline{\Omega})$ はコンパクト作用素である．
(2) $\{u_k\}$ を $C^{0,h'}(\overline{\Omega})$ 上の点列で $\|u_k\|_{h',\infty} \leq M$ をみたすものとする．

$\{u_k\}$ は同程度連続かつ $C^{0,h}(\overline{\Omega})$ において有界である．よってアスコリ＝アルツェラの定理 6.2.1 より，一様収束する部分列をもつ．$\{u_k\}$ が一様収束するとして一般性を失わない．その極限を v とする．$|u_k(\boldsymbol{x})-u_n(\boldsymbol{y})| \leq M\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{h'}$ より．$k\to\infty$ として $v \in C^{0,h'}(\overline{\Omega})$ が言える．ゆえに，

$$|(u_k-v)(\boldsymbol{x})-(u_k-v)(\boldsymbol{y})| \leq 2M\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{h'}.$$

$\delta>0$ に対し，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \geq \delta$ ならば，

$$\frac{|(u_k-v)(\boldsymbol{x})-(u_k-v)(\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^h} \leq 2\delta^{-h}\|u_k-v\|_{0,\infty}.$$

$0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|<\delta$ ならば，

$$\frac{|(u_k-v)(\boldsymbol{x})-(u_k-v)(\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^h} < 2M\delta^{h'-h}.$$

任意の $\varepsilon>0$ に対し，$2M\delta^{h'-h} \leq \varepsilon$ となるように $\delta>0$ を取る．$k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$k \geq k_0$ ならば，$\|u_k-v\|_{0,\infty}<\varepsilon$, $\quad 2\delta^{-h}\|u_k-v\|_{0,\infty}<\varepsilon$．よって $|u_k-v|_{h,\infty}<\varepsilon$, $\|u_k-v\|_{h,\infty}<2\varepsilon$．したがって $\{u_k\}$ は $C^{0,h}(\overline{\Omega})$ において v に収束する． □

7.2 補間不等式

7.2.1 テスト関数の正関数とその重み

実または複素ベクトル空間 V 上の関数 $N: V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ であって

$$N(au)=|a|N(u) \quad (u \in V,\ a \in \mathbb{R}, \mathbb{C})$$

をみたすものを **正関数** とよぶことにする．

$\mathbb{R}^n$ 上の複素数値 C^∞ 関数であってある有界集合の外で 0 になるものをテスト関数といい，それら全体のなす複素ベクトル空間を $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と書くのであった．開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対し，$C_0^\infty(U)=\{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \mathrm{supp}(\varphi) \subset U\}$ とする．

正関数 $N: C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が，$\tau>0$ 倍写像 $\sigma_\tau: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \mapsto \tau\boldsymbol{x}$ によるひきもどし $(\sigma_\tau^* u)(\boldsymbol{x})=u(\tau\boldsymbol{x})$ に対して $N(\sigma_\tau^* u)=\tau^\lambda N(u)$ となるとき，N は **重み λ** であるという．

重み λ, μ の正関数 N_0, N_1 および $0 < \theta < 1$ に対し，${N_0}^{1-\theta}{N_1}^{\theta}$ は重み $(1-\theta)\lambda + \theta\mu$ の正関数になる．

以下，同じ重みをもつ $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上の正関数の間の不等式について調べる．

$\lambda < \mu < \nu$, $\mu = (1-\theta)\lambda + \theta\nu$, $0 < \theta < 1$ に対し，重み λ, μ, ν の正関数 N_λ, N_μ, N_ν に関する次の主張を $I(\lambda, \mu, \nu)$ で表す：

- 定数 C が存在して，$N_\mu(u) \leq CN_\lambda(u)^{1-\theta}N_\nu(u)^\theta \quad (u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$.

このとき次がなりたつ．

補題 7.2.1 $\lambda < \mu < \nu < \rho$ とすると，

1. $I(\lambda, \mu, \rho), I(\mu, \nu, \rho) \Rightarrow I(\lambda, \nu, \rho)$.
2. $I(\lambda, \nu, \rho), I(\lambda, \mu, \nu) \Rightarrow I(\lambda, \mu, \rho)$.
3. $I(\lambda, \mu, \nu), I(\mu, \nu, \rho) \Rightarrow I(\lambda, \mu, \rho), I(\lambda, \nu, \rho)$.

7.2.2 ヘルダー半ノルムの間の補間不等式

$\lambda \geq 0$ に対し，$N_\lambda = |\cdot|_{H(\lambda)}$ とおくと，これは $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上ではノルムであり，その重みは λ である．次はあきらか．

補題 7.2.2 $0 \leq \lambda < \mu < \nu$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，$I(\lambda, \mu, \nu) \Rightarrow I(\lambda + m, \mu + m, \nu + m)$.

補題 7.2.3 $0 \leq \lambda < \mu < \nu \leq 1$ に対し，定数 C が存在して，

$$|u|_{H(\mu)} \leq C\, {|u|_{H(\lambda)}}^{1-\theta}\, {|u|_{H(\nu)}}^{\theta} \quad (\mu = (1-\theta)\lambda + \theta\nu,\ 0 < \theta < 1).$$

すなわち，$0 \leq \lambda < \mu < \nu \leq 1$ に対し $I(\lambda, \mu, \nu)$ が成立する．

証明 $\lambda > 0, \nu < 1$ の場合は，

$$\frac{|u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^\mu} = \left(\frac{|u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^\lambda}\right)^{1-\theta} \left(\frac{|u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^\nu}\right)^{\theta}$$

より従う．$|u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{y})| \leq 2|u|_{0,\infty}$ より $\lambda = 0$ の場合が従う．

また $|u|_{H(0,1)} \leq \sqrt{n}\,|u|_{H(1)}$ より $\nu = 1$ の場合が従う． □

補題 7.2.4 $0 \leq \lambda < \mu = 1 < \nu \leq 2$ に対し，$I(\lambda, \mu, \nu)$ が成立する．

証明 $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n$ を第 j 成分が 1 で他が 0 のベクトルとすると，平均値の定理より，任意の $r > 0$ に対して $0 < s < r$ が存在して，

$$\begin{aligned}
&\partial_j u(\boldsymbol{x} + s\mathbf{e}_j) = r^{-1}(u(\boldsymbol{x} + r\mathbf{e}_j) - u(\boldsymbol{x})),\\
&|\partial_j u(\boldsymbol{x})| \leq |\partial_j u(\boldsymbol{x}) - \partial_j u(\boldsymbol{x} + s\mathbf{e}_j)| + r^{-1}|u(\boldsymbol{x} + r\mathbf{e}_j) - u(\boldsymbol{x})|\\
&\quad \leq 2|u|_{H(\nu)}s^{\nu-1} + 2|u|_{H(\lambda)}r^{\lambda-1} \leq 2|u|_{H(\nu)}r^{\nu-1} + 2|u|_{H(\lambda)}r^{\lambda-1}.
\end{aligned}$$

係数の 2 は $\lambda = 0$ や $\nu = 2$ の場合のために入れた．$\nu - 1 > 0 > \lambda - 1$ より，

最右辺を最小にする r の値がある．それを求めて代入すると，

$$r = \left(\frac{(1-\lambda)|u|_{H(\lambda)}}{(\nu-1)|u|_{H(\nu)}}\right)^{\frac{1}{\nu-\lambda}},$$

$$\begin{aligned}
&|\partial_j u(\boldsymbol{x})| \\
&\le 2|u|_{H(\nu)}\left(\frac{(1-\lambda)|u|_{H(\lambda)}}{(\nu-1)|u|_{H(\nu)}}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu-\lambda}} + 2|u|_{H(\lambda)}\left(\frac{(1-\lambda)|u|_{H(\lambda)}}{(\nu-1)|u|_{H(\nu)}}\right)^{\frac{\lambda-1}{\nu-\lambda}} \\
&= C{|u|_{H(\lambda)}}^{1-\theta}{|u|_{H(\nu)}}^{\theta} \quad \left(\theta = \frac{1-\lambda}{\nu-\lambda},\ (1-\theta)\lambda + \theta\nu = 1\right).
\end{aligned}$$

□

次の定理は，補題 7.2.1，7.2.2 によって補題 7.2.3，7.2.4 に帰着される．

定理 7.2.1 $N_\lambda = |\cdot|_{H(\lambda)}$ $(\lambda \ge 0)$ とおくとき，$0 \le \lambda < \mu < \nu$ に対して $I(\lambda, \mu, \nu)$ が成立する．すなわち定数 C が存在して，

$$|u|_{H(\mu)} \le C{|u|_{H(\lambda)}}^{1-\theta}{|u|_{H(\nu)}}^{\theta} \quad (\mu = (1-\theta)\lambda + \theta\nu,\ 0 < \theta < 1).$$

この不等式は $u \in C^{\lambda,0}(\mathbb{R}^n) \cap C^{\nu,0}(\mathbb{R}^n)$ に対しても成立する．

7.2.3 L^p ノルムの間の補間不等式

関数 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < \infty$ に対し，

$$\|u\|_{L^p} = |u|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{1/p}$$

とおき，また

$$\|u\|_{L^\infty} = |u|_\infty = \sup\{|u(\boldsymbol{x})| \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

とおく．ここで $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = |\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n|$ は $\mathbb{R}^n$ の座標系 $(x_1, \ldots, x_n)$ に関する体積要素である．$0 < p \le \infty$ に対し，$|\cdot|_p$ は重み $-\dfrac{n}{p}$ をもつ正関数である．

定理 7.2.2（ミンコフスキーの不等式）$1 \le p \le \infty$ に対し，

$$|f+g|_p \le |f|_p + |g|_p.$$

証明 $p = \infty$ の場合は容易．$1 \le p < \infty$ とする．

$$\frac{|f+g|}{|f|_p + |g|_p} \le \frac{|f| + |g|}{|f|_p + |g|_p} = (1-\theta)\frac{|f|}{|f|_p} + \theta\frac{|g|}{|g|_p} \quad \left(\theta = \frac{|g|_p}{|f|_p + |g|_p}\right).$$

t^p $(t \ge 0)$ は凸関数なので，

$$\frac{|f+g|^p}{(|f|_p + |g|_p)^p} \le (1-\theta)\frac{|f|^p}{{|f|_p}^p} + \theta\frac{|g|^p}{{|g|_p}^p}.$$

両辺を積分すると，$\dfrac{{|f+g|_p}^p}{(|f|_p + |g|_p)^p} \le 1.$ □

定理 7.2.3 (i)（ヤングの不等式）$x_0 \geq 0,\ x_1 \geq 0,\ 0 < \theta < 1$ に対し，

$$x_0{}^{1-\theta} x_1{}^{\theta} \leq (1-\theta)x_0 + \theta x_1.$$

(ii)（ヘルダーの不等式）$p \in [1, \infty]$ に対し，$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^*} = 1$，すなわち $p^* = \dfrac{p}{p-1}$ とおくと，$f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し，

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p^*}}.$$

証明 (i) 指数関数 e^t が凸関数であることより．
(ii) $p = 1, \infty$ の場合は容易．$1 < p < \infty$ とする．$|f|_{L^p} = |g|_{L^{p^*}} = 1$ の場合に示せばよい．ヤングの不等式より，

$$\int_U |fg| \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \int_U \left(\frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{p^*}|g|^{p^*} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1.$$

□

定理 7.2.4 $0 < p < q < r \leq \infty,\ \dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{p} + \dfrac{\theta}{r},\ 0 < \theta < 1$ に対し，

$$\|u\|_{L^q} \leq \|u\|_{L^p}{}^{1-\theta} \|u\|_{L^r}{}^{\theta} \quad (u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

したがって，$N_\lambda = \|\cdot\|_{-n/\lambda}$ $(\lambda \leq 0)$ とおくとき，任意の $\lambda < \mu < \nu \leq 0$ に対し，$I(\lambda, \mu, \nu)$ が成立する．

証明 $\dfrac{(1-\theta)q}{p} = \dfrac{1}{s}$ とおくと，$1 < s \leq \infty,\ \dfrac{\theta q}{r} = \dfrac{1}{s^*}$．
　そこで $f = |u|^{(1-\theta)q},\ g = |u|^{\theta q}$ に対してヘルダーの不等式を適用すると，

$$\||u|^q\|_{L^1} \leq \left\| |u|^{(1-\theta)q} \right\|_{L^s} \left\| |u|^{\theta q} \right\|_{L^{s^*}}.$$

すなわち $\|u\|_{L^q}^q \leq \|u\|_{L^p}^{p/s} \|u\|_{L^r}^{r/s^*} = \|u\|_{L^p}^{(1-\theta)q} \|u\|_{L^r}^{\theta q}$． □

7.2.4 L^p ノルムとヘルダー半ノルムの間の補間不等式

補題 7.2.5 $N_\lambda = |\cdot|_{H(\lambda)}$ $(\lambda \geq 0)$, $\|\cdot\|_{L^{-n/\lambda}}$ $(-n \leq \lambda < 0)$ とおくとき，$-n \leq \lambda < \mu = 0 < \nu \leq 1$ に対し，$I(\lambda, \mu, \nu)$ が成立する．

証明 $p = -\dfrac{n}{\lambda} \geq 1$ とおく．

$$|u(\boldsymbol{x})| \leq |u(\boldsymbol{y})| + |u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{y})| \leq |u(\boldsymbol{y})| + 2|u|_{H(\nu)}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^\nu.$$

係数の 2 は $\nu = 1$ の場合のために入れた．両辺を $B = \{\boldsymbol{y} \mid |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \leq r\}$ 上で積分する．ヘルダーの不等式より，

$$\int_B |u(\boldsymbol{y})| \mathrm{d}\boldsymbol{y} \leq \|u\|_{L^p} \left(\int_B \mathrm{d}\boldsymbol{y} \right)^{1-\frac{1}{p}}$$

なので，結局 u によらない定数 C', C'' が存在して，

$$|u(\boldsymbol{x})|\,r^n \leq C'\|u\|_{L^p} r^{n(1-\frac{1}{p})} + C''|u|_{H(\nu)} r^{n+\nu}.$$

よって $|u|_{H(0)} \leq C'\|u\|_{L^p} r^{\lambda} + C''|u|_{H(\nu)} r^{\nu}$．補題 7.2.4 と同様に，右辺を最小にする r を求めて代入すると，u によらない定数 C が存在して，

$$|u|_{H(0)} \leq C\|u\|_{L^p}{}^{1-\theta}|u|_{H(\nu)}{}^{\theta} \ ((1-\theta)\lambda + \theta\nu = 0,\ 0 < \theta < 1). \qquad \square$$

次の定理は，補題 7.2.1 によって定理 7.2.4, 7.2.1, 補題 7.2.5 に帰着される．

定理 7.2.5 $N_\lambda = |\cdot|_{H(\lambda)}$ $(\lambda \geq 0)$, $\|\cdot\|_{L^{-n/\lambda}}$ $(-n \leq \lambda < 0)$ とおくとき，任意の $\lambda < \mu < \nu$ に対して $I(\lambda, \mu, \nu)$ が成立する．すなわち定数 C が存在して，

$$N_\mu \leq C N_\lambda^{1-\theta} N_\nu^{\theta} \quad (\mu = (1-\theta)\lambda + \theta\nu,\ 0 < \theta < 1).$$

L^p ノルムとヘルダー半ノルムが重みを合言葉にきれいにつながった．

7.2.5　ソボレフ半ノルム

$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ 1 \leq p < \infty,\ u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し，

$$|u|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha u|^p \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{1/p}$$

とおく．これは重み $m - \dfrac{n}{p}$ をもつ半ノルムである．これを **ソボレフ半ノルム** とよぶ．これによって同じ重みのヘルダー半ノルムや L^q ノルムを上から評価することができる．

補題 7.2.6 $n < p < \infty$ に対し，$\lambda = 1 - \dfrac{n}{p}$ とおくと，定数 C が存在して，

$$R^{-n} \int_{|\boldsymbol{x}| \leq R} |u(\boldsymbol{x}) - u(0)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq C R^\lambda |u|_{1,p} \quad (u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ R > 0).$$

証明 $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ を中心とする単位球面を Σ とすると，$\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma$ に対し，

$$\int_{|\boldsymbol{x}| \leq R} |u(\boldsymbol{x}) - u(0)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Sigma \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \int_0^R |u(t\boldsymbol{\sigma}) - u(0)|\,t^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

$$\leq R^n \int_\Sigma \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \int_0^R |u(t\boldsymbol{\sigma}) - u(0)|\,\mathrm{d}t,$$

$$|u(t\boldsymbol{\sigma}) - u(0)| \leq \int_0^t |\partial_\tau u(\tau\boldsymbol{\sigma})|\,\mathrm{d}\tau \leq \int_0^t |\nabla u(\tau\boldsymbol{\sigma})|\,\mathrm{d}\tau.$$

$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^*} = 1$ とすると，ヘルダーの不等式より，

$$\int_0^t |\nabla u(\tau\boldsymbol{\sigma})|\,\mathrm{d}\tau \leq \left(\int_0^t \tau^{-\frac{n-1}{p}p^*}\mathrm{d}\tau\right)^{1/p^*} \left(\int_0^t |\nabla u(\tau\boldsymbol{\sigma})|^p\,\tau^{n-1}\mathrm{d}\tau\right)^{1/p}$$

$$\leq C' t^{1-\frac{n}{p}} \left(\int_0^R |\nabla u(\tau\boldsymbol{\sigma})|^p\,\tau^{n-1}\mathrm{d}\tau\right)^{1/p} \quad (0 \leq t \leq R).$$

よって

$$\int_{|\boldsymbol{x}|\le R} |u(\boldsymbol{x}) - u(0)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \le C'' R^{n+1-\frac{n}{p}} \int_{\Sigma} \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \left(\int_0^R |\nabla u(\tau\boldsymbol{\sigma})|^p\, \tau^{n-1} \mathrm{d}\tau \right)^{1/p}.$$

Σ 上 L^1 ノルムは L^p ノルムの定数倍で抑えられるので，結論を得る． □

定理 7.2.6 $p \in (n, \infty)$ に対し，定数 C が存在して，

$$|u|_{1-\frac{n}{p},\infty} \le C|u|_{1,p} \quad (u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

証明 $R = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ とおく．

$$|u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{y})| \le |u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{z})| + |u(\boldsymbol{z}) - u(\boldsymbol{y})|$$

の両辺を $\{\boldsymbol{z} \mid |\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}| \le R,\ |\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}| \le R\}$ で積分して，補題 7.2.6 によって右辺を上から抑えると，$R^n|u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{y})| \le CR^{n+1-\frac{n}{p}}|u|_{1,p}$ が得られる． □

定理 7.2.7 $p, q \in [1, \infty)$, $-\dfrac{n}{q} = 1 - \dfrac{n}{p}$ に対し，定数 C が存在して，

$$|u|_{0,q} \le C|u|_{1,p} \quad (u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

証明 まず $p = 1$ の場合を考える．$q = \dfrac{n}{n-1}$ となる．

$u(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x_j} \partial_j u\,\mathrm{d}x_j$ より，$|u(\boldsymbol{x})| \le \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_j u|\,\mathrm{d}x_j$．右辺を ${f_j}^{n-1}$ とおくと，$|u(\boldsymbol{x})|^q \le \displaystyle\prod_{j=1}^n f_j$．よってヘルダーの不等式より，

$$\left(\int |u|^q\,\mathrm{d}x_1 \right)^{n-1} \le \left(f_1 \int \prod_{j=2}^n f_j\,\mathrm{d}x_1 \right)^{n-1} \le {f_1}^{n-1} \prod_{j=2}^n \int {f_j}^{n-1}\,\mathrm{d}x_1.$$

積分範囲は全体とする．よって

$$\left(\int |u|^q\,\mathrm{d}x_1 \right)^{n-1} \le \int |\partial_1 u|\,\mathrm{d}x_1 \prod_{j=2}^n \int |\partial_j u|\,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_j.$$

再びヘルダーの不等式より，

$$\left(\int |u|^q\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \right)^{n-1} \le \prod_{i=1}^2 \int |\partial_i u|\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \cdot \prod_{j=3}^n \int |\partial_j u|\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_j.$$

これを続けて，$\mathrm{d}^k\boldsymbol{x} = \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_k$ とすると，

$$\left(\int |u|^q\,\mathrm{d}^k x \right)^{n-1} \le \prod_{i=1}^k \int |\partial_i u|\,\mathrm{d}^k x \cdot \prod_{j=k+1}^n \int |\partial_j u|\,\mathrm{d}^k x \mathrm{d}x_j.$$

最後に $|u|_q \le \displaystyle\prod_{j=1}^n {|\partial_j u|_1}^{1/n} \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n |\partial_j u|_1$ が得られる．よって $p = 1$ の場合が示された．

$p>1$ の場合，$u=|v|^s$ $(s>0)$ に $p=1$ の場合の議論を適用すると，$\left|\,|v|^s\right|_{\frac{n}{n-1}} \le \prod_{j=1}^{n} \left|s|v|^{s-1}\partial_j v\right|_1{}^{1/n}$. $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p^*}=1$ に対し，ヘルダーの不等式より，$\prod_{j=1}^{n} \left|s|v|^{s-1}\partial_j v\right|_1{}^{1/n} \le s\left|\,|v|^{s-1}\right|_{p^*} \prod_{j=1}^{n} |\partial_j v|_p{}^{1/n}$.

$s\dfrac{n}{n-1}=(s-1)p^*$ となるように $s=\dfrac{(n-1)p}{n-p}$ とおくと，$\dfrac{n}{n-1}s=\dfrac{np}{n-p}=q$ となる．ゆえに $|v|_q{}^{(n-1)q/n} \le s|v|_q{}^{q/p^*} \prod_{j=1}^{n} |\partial_j v|_p{}^{1/n}$.

$\dfrac{n-1}{n}q-\dfrac{q}{p^*}=1$ より，$|v|_q \le s\prod_{j=1}^{n} |\partial_j v|_p{}^{1/n} \le \dfrac{s}{n}\sum_{j=1}^{n} |\partial_j v|_p$. □

定理 7.2.6, 7.2.7 より次が従う．

定理 7.2.8 $m\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$, $p\in[1,\infty)$ とする．

(1) $m-\dfrac{n}{p}=\lambda>0$, $\lambda\notin\mathbb{N}$ ならば，定数 C が存在して，

$$|u|_{\lambda,\infty} \le C|u|_{m,p} \quad (u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

(2) $m-\dfrac{n}{p}=-\dfrac{n}{q}$, $q\in[1,\infty)$ ならば，定数 C が存在して，

$$|u|_{0,q} \le C|u|_{m,p} \quad (u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

(3) $m-\dfrac{n}{p}=k-\dfrac{n}{q}$, $k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$, $k<m$, $q\in[1,\infty)$ ならば，定数 C が存在して，

$$|u|_{k,q} \le C|u|_{m,p} \quad (u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

この定理と定理 7.2.5 より次の補間不等式が得られる．

定理 7.2.9 $m\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$, $p, r\in[1,\infty)$, $m-\dfrac{n}{p}\notin\mathbb{Z}_{\ge 0}$, $0<\theta<1$ とする．

(1) $\mu=\theta\left(m-\dfrac{n}{p}\right)+(1-\theta)\dfrac{-n}{r}\ge 0$ ならば，定数 C が存在して，

$$|u|_{\mu,\infty} \le C|u|_{m,p}{}^{\theta}|u|_{0,r}{}^{1-\theta} \quad (u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

(2) $q\in[1,\infty)$, $-\dfrac{n}{q}=\theta\left(m-\dfrac{n}{p}\right)+(1-\theta)\dfrac{-n}{r}$ ならば，定数 C が存在して，

$$|u|_{0,q} \le C|u|_{m,p}{}^{\theta}|u|_{0,r}{}^{1-\theta} \quad (u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

条件を $0<\theta\le 1$ とすれば，定理 7.2.8 (1) (2) が含まれることになる．

定理 7.2.9 において，重み $m-\dfrac{n}{p}$ が非負整数である場合が除外されていることに注意する．

7.2.6 ソボレフ半ノルムの間の補間不等式

有界閉区間 I 上の C^∞ 級関数は，内部で C^∞ 級であってすべての $n\ge 0$ 階

導関数が I 上の連続関数に拡張されるものであると定義し，その全体のなすベクトル空間を $C^\infty(I)$ とする．$u\in C^\infty(I)$, $1\le p<\infty$ に対し，

$$|u|_{L^p(I)}=\left(\int_I |u(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

とおく．

ソボレフ半ノルムのソボレフ半ノルムによる上からの評価は次の 2 つの補題に基づく．

補題 7.2.7 $p,\,q,\,r\in[1,\,\infty)$, $I=[a,\,b]$ に対し，

$$\lambda=2-\frac{1}{p},\quad \mu=1-\frac{1}{q},\quad \nu=-\frac{1}{r},\quad |I|=b-a$$

とおくと，

$$|I|^\mu|u'|_{L^q(I)}\le|I|^\lambda|u''|_{L^p(I)}+8\,|I|^\nu|u|_{L^r(I)}\quad (u\in C^2(I)).$$

証明 $a\le x_1<x_2\le b$ に対し，平均値の定理より，$x_1<\xi<x_2$ が存在して，

$$u'(x)=\int_\xi^x u''(y)\,\mathrm{d}y+\frac{u(x_2)-u(x_1)}{x_2-x_1}.$$

$\alpha=\dfrac{1}{4}|I|$ とおき，両辺を $a\le x_1\le a+\alpha$, $a+3\alpha\le x_2\le b$ で積分すると，この範囲では $|x_2-x_1|\ge 2\alpha$ なので，

$$\alpha^2|u'(x)|\le\alpha^2|u''|_{L^1(I)}+\frac{1}{2}\,|u|_{L^1(I)}$$

を得る．よってヘルダーの不等式より，

$$\begin{aligned}|u'|_{L^q(I)}&\le|I|^{\frac{1}{q}}\left(|u''|_{L^1(I)}+\frac{1}{2\alpha^2}|u|_{L^1(I)}\right)\\&\le|I|^{\frac{1}{q}}\left(|I|^{1-\frac{1}{p}}|u''|_{L^p(I)}+\frac{1}{2\alpha^2}|I|^{1-\frac{1}{r}}|u|_{L^r(I)}\right)\\&=|I|^{\frac{1}{q}}\left(|I|^{1-\frac{1}{p}}|u''|_{L^p(I)}+8\,|I|^{-1-\frac{1}{r}}|u|_{L^r(I)}\right).\end{aligned}$$

□

補題 7.2.8 $p,\,r\in[1,\,\infty]$, $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{2p}+\dfrac{1}{2r}$ に対し，

$$|u'|_q\le 4\sqrt{2}\,|u''|_p{}^{1/2}|u|_r{}^{1/2}\quad (u\in C_0^\infty(\mathbb{R})).$$

証明 $p,\,r\in(1,\,\infty)$ の場合に示す．それ以外の場合は $\to 1$, $\to\infty$ の極限を取ればよい．

$u\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $u\not\equiv 0$ とすると，$|u''|_p>0$.
$s=\dfrac{1}{q}+1-\dfrac{1}{p}$ とおくと，補題 7.2.7 より，任意の閉区間 J に対し，

$$|u'|_{L^q(J)}\le|J|^s|u''|_{L^p(J)}+8\,|J|^{-s}|u|_{L^r(J)}.$$

u の台が $(-\infty, a]$ に含まれないとすると，$s>0$ かつ u がコンパクト台をもつので，$x \to \infty$ のとき，

$$(x-a)^s |u''|_{L^p([a,x])} \to \infty, \quad 8\,(x-a)^{-s}|u|_{L^r([a,x])} \to 0.$$

したがって，$(x_1-a)^s|u''|_{L^p([a,x_1])} < 8\,(x_1-a)^{-s}|u|_{L^r([a,x_1])}$ ならば，$x_2 \in (x_1, \infty)$ が存在して，

$$\begin{aligned}(x_2-a)^s|u''|_{L^p([a,x_2])} &= 8\,(x_2-a)^{-s}|u|_{L^r([a,x_2])} \\ &= \sqrt{8\,|u''|_{L^p([a,x_2])}|u|_{L^r([a,x_2])}}.\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ を固定する．上の観察より，u の台が $[a_0, b_0]$ に含まれるとすると，増大列 $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ が存在して，任意の自然数 j に対し，$I_j = [a_{j-1}, a_j]$ とおくと，次のいずれかがなりたつ．

1. $|I_j| = \varepsilon, \quad |I_j|^s|u''|_{L^p(I_j)} \geq 8\,|I_j|^{-s}|u|_{L^r(I_j)}$.
2. $|I_j| > \varepsilon, \quad |I_j|^s|u''|_{L^p(I_j)} = 8\,|I_j|^{-s}|u|_{L^r(I_j)}$.

したがって，

$$|u'|_{L^q(I_j)} \leq \max\left\{2\varepsilon^s|u''|_{L^p(I_j)},\, 2\sqrt{8\,|u''|_{L^p(I_j)}|u|_{L^r(I_j)}}\right\}.$$

$|I_j| \geq \varepsilon$ より，自然数 N が存在して，$a_{N-1} < b_0 \leq a_N$.

両辺を q 乗して $j = 1, \ldots, N$ について和を取ると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u'|^q \,\mathrm{d}x \leq \sum_{j=1}^{N} 2^q \varepsilon^{qs}\,|u''|^q_{L^p(I_j)} + \sum_{j=1}^{N}\left(2\sqrt{8|u''|_{L^p(I_j)}|u|_{L^r(I_j)}}\right)^q.$$

右辺を見ると，$(N-1)\varepsilon < b_0 - a_0$ より，

$$\sum_{j=1}^{N} \varepsilon^{qs}\,|u''|^q_{L^p(I_j)} \leq \varepsilon^{qs} N\,|u''|_p{}^q \leq \varepsilon^{qs-1}(b_0 - a_0 + \varepsilon)\,|u''|_p{}^q.$$

$qs - 1 > 0$ より，最右辺は $\varepsilon \to +0$ のとき 0 に収束する．

$\dfrac{q}{2p} + \dfrac{q}{2r} = 1$ なので，数列のヘルダーの不等式より，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}\sqrt{|u''|^q_{L^p(I_j)}|u|^q_{L^r(I_j)}} &= \sum_{j=1}^{N}\left(\int_{I_j}|u''|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{2p}}\left(\int_{I_j}|u''|^r\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{2r}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{N}\int_{I_j}|u''|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{2p}}\left(\sum_{j=1}^{N}\int_{I_j}|u''|^r\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{2r}} = |u''|_p{}^{q/2}\,|u|_r{}^{q/2}.\end{aligned}$$

したがって，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|u'|^q\,\mathrm{d}x \leq \left(2\sqrt{8\,|u''|_p\,|u|_r}\right)^q$. □

次の定理は重要である．

定理 7.2.10 $p, q, r \in [1, \infty]$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2p} + \dfrac{1}{2r}$ に対し，定数 C が存在して，

$$\begin{aligned}|u|_{1,q} &\le C\,|u|_{2,p}{}^{1/2}\,|u|_{0,r}{}^{1/2}\\ &\le \frac{C}{2}(a\,|u|_{2,p}+a^{-1}\,|u|_{0,r})\quad (u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ a>0).\end{aligned}$$

証明 やはり $p,\,r\in[1,\,\infty)$ の場合に示せばよい．補題 7.2.8 より，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_j u|^q\,\mathrm{d}x_j \le (4\sqrt{2})^q\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_j{}^2u|^p\,\mathrm{d}x_j\right)^{\frac{q}{2p}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u|^r\,\mathrm{d}x_j\right)^{\frac{q}{2r}}.$$

両辺を x_j 以外の $n-1$ 変数について積分すると，ヘルダーの不等式より，$|\partial_j u|_q{}^q \le (4\sqrt{2})^q|\partial_j{}^2u|_p{}^{q/2}|u|_r{}^{q/2}$. □

次は容易.

補題 7.2.9 $m_i\in\mathbb{Z}_{\ge 0},\,p_i\in[1,\,\infty),\,\lambda_i=m_i-\dfrac{n}{p_i}\ (i=0,\,1,\,2),\ 0<\theta<1$, $m_1=(1-\theta)m_0+\theta m_2,\ \lambda_1=(1-\theta)\lambda_0+\theta\lambda_2$ とし，定数 C が存在して，

$$|u|_{m_1,\,p_1}\le C|u|_{m_0,\,p_0}{}^{1-\theta}|u|_{m_2,\,p_2}{}^{\theta}\quad (u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$$

がなりたつとする．このとき，任意の $k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対し，定数 C' が存在して，

$$|u|_{m_1+k,\,p_1}\le C'|u|_{m_0+k,\,p_0}{}^{1-\theta}|u|_{m_2+k,\,p_2}{}^{\theta}\quad (u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

このことと補題 7.2.1, 定理 7.2.10 より次が従う.

定理 7.2.11 $m,\,k\in\mathbb{N},\ p,\,r\in[1,\,\infty],\ 0<\theta<1,\ k=\theta m,\ \dfrac{1}{q}=\dfrac{\theta}{p}+\dfrac{1-\theta}{r}$ とする．このとき定数 C が存在して，

$$|u|_{k,\,q}\le C|u|_{m,\,p}{}^{\theta}|u|_{0,\,r}{}^{1-\theta}\quad (u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

以上により，定理 7.2.9 (2) の一般化が得られる.

定理 7.2.12 $m,\,k\in\mathbb{N},\ m\ge k,\ p,q,r\in[1,\infty),\ m-\dfrac{n}{p}-k\notin\mathbb{Z}_{\ge 0}$, $\dfrac{k}{m}\le\theta<1$, $k-\dfrac{n}{q}=\theta\left(m-\dfrac{n}{p}\right)+(1-\theta)\dfrac{-n}{r}$ とする．このとき定数 C が存在して，

$$|u|_{k,\,q}\le C|u|_{m,\,p}{}^{\theta}|u|_{0,\,r}{}^{1-\theta}\quad (u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

証明 定理 7.2.11 より，$\theta'=\dfrac{k}{m},\ \dfrac{1}{q'}=\dfrac{\theta'}{p}+\dfrac{1-\theta'}{r}$ とおくと，定数 C' が存在して，$|u|_{k,\,q'}\le C'|u|_{m,\,p}{}^{\theta'}|u|_{0,\,r}{}^{1-\theta'}$.

定理 7.2.9 より，$k-\dfrac{n}{q}=\theta''\left(m-\dfrac{n}{p}\right)+(1-\theta'')\left(k-\dfrac{n}{q'}\right)$ に対し，定数 C'' が存在して，$|u|_{k,\,q}\le C''|u|_{m,\,p}{}^{\theta''}|u|_{k,\,q'}{}^{1-\theta''}$. □

定理 7.2.12 の条件を $m,\,k\in\mathbb{Z}_{\ge 0},\ \dfrac{k}{m}\le\theta\le 1$ とすれば，定理 7.2.4, 7.2.8, 7.2.11 が含まれることになる.

次の2つの定理は，重み $m-\dfrac{n}{p}$ が自然数の場合にも成立する．

定理 7.2.13 $m\in\mathbb{N},\ p\in[1,\infty),\ 0<\theta<1,\ 0=\theta\left(m-\dfrac{n}{p}\right)+(1-\theta)\dfrac{-n}{p}$ とする．このとき定数 C が存在して，

$$|u|_{0,\infty}\leq C|u|_{m,p}{}^{\theta}|u|_{0,p}{}^{1-\theta}\quad(u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

証明 $m-\dfrac{n}{p}\in\mathbb{N}$ の場合の証明が残っている．

部分積分をくりかえすと，$t>0,\ \boldsymbol{\sigma}\in\Sigma$ に対し，

$$\begin{aligned}u(0)&=u(t\boldsymbol{\sigma})-\int_0^t\partial_\tau u(\tau\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{d}\tau\\&=u(t\boldsymbol{\sigma})-[\tau\partial_\tau u(\tau\boldsymbol{\sigma})]_0^t+\int_0^t\tau\partial_\tau{}^2u(\tau\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{d}\tau\\&=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(-t)^j}{j!}\partial_t{}^ju(t\boldsymbol{\sigma})-\int_0^t\frac{(-\tau)^{m-1}}{(m-1)!}\partial_\tau{}^mu(\tau\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

$mp-n>0$ に注意すると，ヘルダーの不等式より，定数 C_1 が存在して，

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^t(-\tau)^{m-1}\partial_\tau{}^mu(\tau\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{d}\tau\right|^p\\&\leq\left|\int_0^t\tau^{(m-1-\frac{n-1}{p})\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}\tau\right|^{p-1}\int_0^t|\partial_\tau{}^mu(\tau\boldsymbol{\sigma})|^p\tau^{n-1}\mathrm{d}\tau\\&\leq C_1t^{mp-n}\int_0^\infty|\partial_\tau{}^mu(\tau\boldsymbol{\sigma})|^p\tau^{n-1}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\int_0^R\mathrm{d}t\cdot t^{n-1}\left|\int_0^t(-\tau)^{m-1}\partial_\tau{}^mu(\tau\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{d}\tau\right|^p\\&\leq C_1\int_0^R t^{mp-1}\mathrm{d}t\int_\Sigma\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\int_0^\infty|\partial_\tau{}^mu(\tau\boldsymbol{\sigma})|^p\tau^{n-1}\mathrm{d}\tau\\&\leq C_1\frac{R^{mp}}{mp}|u|_{m,p}{}^p.\end{aligned}$$

したがって，定数 C_2 が存在して，

$$|u(0)|\,R^{n/p}\leq C_2\sum_{j=0}^mR^j|u|_{j,p}.$$

定理 7.2.11 とヤングの不等式より，$0<j<m$ に対し，定数 C_3 が存在して，

$$\begin{aligned}R^j|u|_{j,p}&\leq C_3R^j|u|_{m,p}{}^{\frac{j}{m}}|u|_{0,p}{}^{1-\frac{j}{m}}\\&\leq C_3\left(\frac{j}{m}R^m|u|_{m,p}+\left(1-\frac{j}{m}\right)|u|_{0,p}\right).\end{aligned}$$

したがって，定数 C_4 が存在して，

$$|u(0)|\leq C_4R^{-n/p}(R^m|u|_{m,p}+|u|_{0,p}).$$

右辺が最小となるように R を取れば，結論が得られる． □

この定理の場合は，$\theta = 1$ とすることができない．すなわち重み $m - \dfrac{n}{p}$ が 0 の場合，$|u|_{0,\infty} \le C|u|_{m,p}$ となる定数 C が存在しないことがある．2 次元多様体上の調和写像の理論や 4 次元多様体上のヤン＝ミルズ理論は，この微妙なところに位置している．

定理 7.2.13 は次のように一般化される．

定理 7.2.14 $m, k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, $p \in [1, \infty)$, $0 < \theta < 1$, $k = \theta\left(m - \dfrac{n}{p}\right) + (1 - \theta)\dfrac{-n}{p}$ とする．このとき定数 C が存在して，

$$|u|_{k,\infty} \le C{|u|_{m,p}}^{\theta}{|u|_{0,p}}^{1-\theta} \quad (u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

証明 k, $m - \dfrac{n}{p} \in \mathbb{N}$ の場合が残っている．やることは定理 7.2.12 の証明と一緒である．

定理 7.2.11 より，$\theta' = \dfrac{k}{m}$ とおくと，定数 C' が存在して，

$$\|u\|_{k,p} \le C'{\|u\|_{m,p}}^{\theta'}{\|u\|_{0,p}}^{1-\theta'}.$$

また定理 7.2.13 より，$k = \theta''\left(m - \dfrac{n}{p}\right) + (1 - \theta'')\left(k - \dfrac{n}{p}\right)$ に対し，

$$\|u\|_{k,\infty} \le C{\|u\|_{m,p}}^{\theta''}{\|u\|_{k,p}}^{1-\theta''}.$$ □

なお，$m - \dfrac{n}{p} = 0$ の場合のうち，$p = 1, m = n$ は特別である．

定理 7.2.15 $|u|_{0,\infty} \le |u|_{n,1}$ $(u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$.

証明 $u(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x_n} \mathrm{d}y_n \cdots \int_{-\infty}^{x_1} \mathrm{d}y_1\, \partial_1 \cdots \partial_n u(\boldsymbol{y})$ より． □

7.3 ソボレフ空間

7.3.1 弱微分とソボレフ空間

開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ において $u \in C^\infty(U)$, $\varphi \in C_0^\infty(U)$ と多重指数 α に対し，

$$\int_U u\,(\partial^\alpha \varphi)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (-1)^{|\alpha|}\int_U (\partial^\alpha u)\,\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

そこで次の概念を導入する．

定義 7.3.1 $u, v \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ と微分作用素 ∂^α に対し，**弱い意味で** $\partial^\alpha u = v$ であるとは，任意の $\varphi \in C_0^\infty(U)$ に対し，

$$\int_U u\,\partial^\alpha \varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (-1)^{|\alpha|}\int_U v\,\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

がなりたつこととする．

定理 7.3.1 弱い意味で $\partial^\alpha u = v$, $\partial^\beta v = w$ ならば，弱い意味で $\partial^{\alpha+\beta} u = w$.

定義 7.3.2 実数 $p \geq 1$ と非負整数 m に対し，弱い意味の導関数を用いて，

$$L^p_m(U) = \{u \in L^p(U) \mid \partial^\alpha u \in L^p(U)\ (|\alpha| \leq m)\}$$

と定義する．$u \in L^p_m(U)$ に対し，

$$\|u\|_{m,p} = \sum_{j=0}^{m} |u|_{j,p}, \quad |u|_{j,p} = \sum_{|\alpha|=j} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(U)}$$

により $L^p_m(U)$ はバナッハ空間になる．これを **ソボレフ空間** という．

7.3.2 たたみこみ

定理 7.3.2 $p, q, r \in [1, \infty]$, $r^{-1} = p^{-1} + q^{-1} - 1$ とする．$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ に対し，

$$f * g(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y})\, g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\, \mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\, g(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

はほとんどいたる所定義され，$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

関数 $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ を f, g の **たたみこみ** という．

証明 $r = \infty$ の場合はヘルダーの不等式より従う．

$r = 1$ の場合，$p = q = 1$ となり，フビニ＝トネリの定理より従う．

$r \in (1, \infty)$ とする．$s = p(1 - q^{-1}) = 1 - pr^{-1} \in [0, 1)$ とおくと，$q^{-1} + sp^{-1} = 1, p = (1 - s)r$ である．ヘルダーの不等式より，

$$\begin{aligned}
|f * g(\boldsymbol{x})| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})|^s \cdot |f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})|^{1-s}\, |g(\boldsymbol{y})|\, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \\
&\leq \||f|^s\|_{p/s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})|^{(1-s)q}\, |g(\boldsymbol{y})|^q\, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \right)^{1/q} \\
&= (\|f\|_p)^s \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})|^{(1-s)q}\, |g(\boldsymbol{y})|^q\, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

よって，

$$|f * g(\boldsymbol{x})|^q \leq (\|f\|_p)^{sq} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})|^{(1-s)q}\, |g(\boldsymbol{y})|^q\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

よってミンコフスキーの不等式より，

$$\begin{aligned}
\||f * g|^q\|_{r/q} &\leq (\|f\|_p)^{sq}\, \||f|^{(1-s)q}\|_{r/q}\, (\|g\|_q)^q \\
&= (\|f\|_p)^{sq}\, (\|f\|_p)^{pq/r}\, (\|g\|_q)^q = (\|f\|_p)^q\, (\|g\|_q)^q.
\end{aligned}$$

よって $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$. □

$\mathbb{R}^n$ 上の関数 u と $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\tau_{\boldsymbol{h}} u(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h})$ とおく．

定理 7.3.3 $p \in [1, \infty)$, $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対し, $\lim_{|\boldsymbol{h}|\to 0} \|\tau_{\boldsymbol{h}} u - u\|_{L^p} = 0$.

証明 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 定理 6.4.11 より, $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ が存在して, $\|u - \varphi\|_{L^p} < \varepsilon$. よって

$$\begin{aligned}\|\tau_{\boldsymbol{h}} u - u\|_{L^p} &\le \|\tau_{\boldsymbol{h}} u - \tau_{\boldsymbol{h}}\varphi\|_{L^p} + \|\tau_{\boldsymbol{h}}\varphi - \varphi\|_{L^p} + \|\varphi - u\|_{L^p} \\ &< \|\tau_{\boldsymbol{h}}\varphi - \varphi\|_{L^p} + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

φ は一様連続なので, $\lim_{|\boldsymbol{h}|\to 0} \|\tau_{\boldsymbol{h}}\varphi - \varphi\|_{L^p} = 0$. □

この定理は $p = \infty$ の場合はなりたたない. たとえば $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $u(x) = 1$ $(x \ge 0)$, $u(x) = 0$ $(x < 0)$ とすれば, 任意の $h \ne 0$ に対し, $\|\tau_h u - u\|_{L^\infty} = 1$ である.

次の定理にはちょっとびっくりする.

定理 7.3.4 $p \in [1, \infty)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $\rho \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対し, $\rho * u$ は一様連続である.

証明 $u^-(\boldsymbol{x}) = u(-\boldsymbol{x})$ とおくと, ヘルダーの不等式より, $|\rho * u(\boldsymbol{x}) - \rho * u(\boldsymbol{x}')| \le \|\rho\|_q \|\tau_{\boldsymbol{x}} u^- - \tau_{\boldsymbol{x}'} u^-\|_p$. よって定理 7.3.3 より, $\rho * u$ は一様連続. □

定理 7.3.5 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\rho \in C^k_0(\mathbb{R}^n)$ ならば, $\rho * u$ は C^k 関数であって, 多重指数 α $(|\alpha| \le k)$ に対し $\partial^\alpha(\rho * u) = (\partial^\alpha \rho) * u$.

証明 $\rho \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$ とする. $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ を第 i 成分が 1 で他が 0 であるベクトルとすると,

$$\rho * u(\boldsymbol{x} + t\mathbf{e}_i) - \rho * u(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} (\rho(\boldsymbol{x} + t\mathbf{e}_i - \boldsymbol{y}) - \rho(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}))\, u(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

平均値の定理より $t^{-1}(\rho(\boldsymbol{x} + t\mathbf{e}_i - \boldsymbol{y}) - \rho(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}))$ が有界なので, 優収束定理より,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\rho * u(\boldsymbol{x} + t\mathbf{e}_i) - \rho * u(\boldsymbol{x})}{t} = (\partial_i \rho) * u$$

が言える. 高次導関数についても同様. □

7.3.3 C^∞ 関数による近似

(3.2) で与えた関数 $\theta_\varepsilon \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ は,

$$\theta_\varepsilon \ge 0, \quad \theta_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = 0\ (|\boldsymbol{x}| \ge \varepsilon), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \theta_\varepsilon(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1$$

をみたしていた. 定理 7.3.5 より, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対し, $J_\varepsilon[u] = \theta_\varepsilon * u$ は C^∞ 関数である. $J_\varepsilon[\cdot]$ をフリードリクスの **軟化子** という.

定理 7.3.6 $p \in [1, \infty)$, $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, コンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ に対し,

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\|J_\varepsilon[u]-u\|_{L^p(K)}=0.$$

証明 $p\neq 1$ の場合，$p^{-1}+q^{-1}=1$ とすると，ヘルダーの不等式より，

$$|J_\varepsilon[u](\boldsymbol{x})|\leq\left(\int_{\mathbb{R}^n}\theta_\varepsilon(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right)^{1/q}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\theta_\varepsilon(\boldsymbol{y})\,|u(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|^p\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right)^{1/p}.$$

ゆえに

$$|J_\varepsilon[u](\boldsymbol{x})|^p\leq\left(\int_{\mathbb{R}^n}\theta_\varepsilon(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right)^{p-1}\int_{\mathbb{R}^n}\theta_\varepsilon(\boldsymbol{y})\,|u(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|^p\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

この不等式は $p=1$ でも成立する．

よって $p\geq 1$ とすると，$\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合 K_0 で内部に K を含むものに対し，$\varepsilon>0$ を K と $\mathbb{R}^n\setminus K_0$ の距離より小さく取ると，$\|J_\varepsilon[u]\|_{L^p(K)}\leq\|u\|_{L^p(K_0)}$．また，

$$J_\varepsilon[u](\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^n}\theta_1^{(n)}(\boldsymbol{y})\,(u(\boldsymbol{x}-\varepsilon\boldsymbol{y})-u(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

定理 6.4.11 より，任意の $\delta>0$ に対し K_0 上の連続関数 w が存在して，$\|u-w\|_{L^p(K_0)}\leq\delta$．よって $\|J_\varepsilon[u]-J_\varepsilon[w]\|_{L^p(K)}\leq\delta$．また，$\varepsilon\to+0$ のとき $J_\varepsilon[w]\to w$ は一様収束．よって $\varepsilon>0$ を十分小さく取れば，$\|J_\varepsilon[w]-w\|_{L^p(K)}\leq\delta$．よって $\|J_\varepsilon[u]-u\|_{L^p(K)}\leq 3\delta$． □

次も言える．

定理 7.3.7 任意の $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対し，$\lim_{\varepsilon\to+0}J_\varepsilon[u]=u$ a.e.

軟化子を用いて次が示される．

定理 7.3.8 開集合 $U\subset\mathbb{R}^n$, $p\in[1,\infty)$ に対し，$C_0^\infty(U)$ は $L^p(U)$ で稠密である．

証明 $f\in L^p(U)$ とする．任意の $\varepsilon>0$ に対し，定理 6.4.11 より，$\varphi\in C_0(U)\subset C_0(\mathbb{R}^n)$ が存在して，$\|f-\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}<\varepsilon$．

十分小さい $\delta>0$ に対し，$J_\delta[\varphi]\in C_0^\infty(U)$, $\|J_\delta[\varphi]-\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}<\varepsilon$．

ゆえに $\|f-J_\delta[\varphi]\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}<2\varepsilon$． □

定理 7.3.9 開集合 $U\subset\mathbb{R}^n$ と $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ が，任意の $\varphi\in C_0^\infty(U)$ に対して，

$$\int_U f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=0$$

をみたすならば，$f=0$ a.e.

証明 $\psi\in C_0^\infty(U)$ に対し，仮定より，$J_\varepsilon[\psi f]=0$．よって定理 7.3.7 より，$\psi f=0$ a.e. である．ψ は任意なので，$f=0$ a.e. □

定理 7.3.10 $p \in [1, \infty)$ に対し，$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L_m^p(\mathbb{R}^n)$ は稠密である．

証明 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を，$0 \le \psi(x) \le 1$ かつ $\psi(x) = 1$ $(|x| \le 1)$, $\psi(x) = 0$ $(|x| \ge 2)$ をみたすものとする．$u \in L_m^p(\mathbb{R}^n), \varepsilon > 0$ に対し，$u_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \psi(\varepsilon|\boldsymbol{x}|^2)J_\varepsilon[u](\boldsymbol{x})$ とおくと，$u_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ であって，$\varepsilon \to +0$ のとき，$\|u_\varepsilon - u\|_{L_m^p} \to 0$ が言える． □

定理 7.3.11 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n, 1 \le p < \infty$ に対し，$C^\infty(U) \cap L_m^p(U)$ は $L_m^p(U)$ で稠密である．

証明 開集合列 $\{U_\nu\}_{\nu \ge 1}$ で $U = \bigcup_{\nu \ge 1} U_\nu$, $\overline{U_\nu} \subset U_{\nu+1}$ となるものを取る．U の開被覆 $\{V_\nu\}_{\nu \ge 1}$ を $V_1 = U_2$, $V_\nu = U_{\nu+1} \setminus \overline{U_{\nu-1}}$ $(\nu \ge 2)$ で与え，これに従属する 1 の分割を $\{\rho_\nu\}$ とする．

$u \in L_m^p(U)$, $\varepsilon > 0$ とする．$\varepsilon_\nu > 0$ を，$\overline{U_{\nu+1}}$ と $\mathbb{R}^n \setminus U_{\nu+2}$ の距離より小さく，そして任意の α, $0 \le |\alpha| \le m$ に対し，

$$w_\nu = J_{\varepsilon_\nu}[\rho_\nu u], \quad \|\partial^\alpha w_\nu - \partial^\alpha(\rho_\nu u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \frac{\varepsilon}{2^\nu}$$

となるように取ることができる．$w = \sum_{\nu \ge 1} w_\nu$ は C^∞ 関数で，ε によらない定数 C が存在して，$\|\partial^\alpha w - \partial^\alpha u\|_{L^p(U)} \le C\varepsilon$ となる． □

定理 7.3.12 $\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$ とする．$1 \le p < \infty$ に対し，制限による写像 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to L_m^p(\Omega)$ の像は稠密である．

証明 $n = 1$, $\Omega = (0, \infty)$ の場合の証明の概略を述べる．

$\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ を $\psi(x) = 1$ $(x \ge 1)$, $\psi(x) = 0$ $(x \le -1)$ をみたすものとする．

$u \in L_m^p(\Omega)$, $t > 0$ に対し，$u_t(x) = \psi(2tx)u(x + t)$ $(x > -t)$ とおく．$x \le -t$ には 0 で拡張して $u_t \in L_m^p(\mathbb{R})$ と見なすことができる．

$t \to +0$ とすると制限 $u_t|\Omega$ は $L_m^p(\Omega)$ において u に収束する．

また定理 7.3.10 より，$L_m^p(\mathbb{R})$ において u_t に収束する $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 上の列が存在する．よって対角線論法により，$C_0^\infty(\mathbb{R})$ 上の列が存在して，$L_m^p(\Omega)$ において u に収束する． □

この定理はより一般の Ω に対して一般化される．

前に述べたように，開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対し $C^{1,0}(U) \subsetneq C^{0,1}(U)$ だが，次はなりたつ．

定理 7.3.13 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対し $C^{0,1}(U) \subset L_1^\infty(U)$．

証明 U 上のリプシッツ連続関数 u に対し，定数 C が存在して，

$$|u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{y})| \le C|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U).$$

$\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n$ を第 j 成分が 1，他が 0 のベクトルとする．$\varphi \in C_0^\infty(U)$, $t \in \mathbb{R}$ に対し，$|t|$ が十分小さいならば，

$$\begin{aligned}
&\left| \int_U u(\boldsymbol{x})(\varphi(\boldsymbol{x} + t\mathbf{e}_j) - \varphi(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \right| \\
&= \left| \int_U (u(\boldsymbol{x} - t\mathbf{e}_j) - u(\boldsymbol{x}))\varphi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \right| \le C|t| \cdot \|\varphi\|_{L^1(U)}.
\end{aligned}$$

ゆえに $\|(\partial_j u)\varphi\|_{L^1(U)} = \|u\partial_j\varphi\|_{L^1(U)} \le C\|\varphi\|_{L^1(U)}$. $C_0^\infty(U) \subset L^1(U)$ は稠密なので，$\partial_j u \in L^\infty(U)$. □

補題 7.3.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を凸開集合とする．$u \in L_1^\infty(\Omega)$, コンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対し，

(1) K 上のリプシッツ連続関数 u_K が存在して，u は K 上ほとんどいたるところ u_K に一致する．

(2) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K$ に対し，

$$|u_K(\boldsymbol{x}) - u_K(\boldsymbol{y})| \le \left(\sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^\infty(\Omega)}{}^2 \right)^{1/2} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|. \tag{7.1}$$

証明 $\Omega' = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \overline{U(\boldsymbol{x}, \varepsilon)} \subset \Omega\}$ とおくと，Ω' も凸開集合．K はコンパクトなので $K \subset \Omega'$ となるように $\varepsilon > 0$ を取ることができる．$J_\varepsilon[u] \in C^\infty(\Omega')$ である．$u_\varepsilon = J_\varepsilon[u]$ とおく．

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Omega'$ に対し，

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon(\boldsymbol{y}) - u_\varepsilon(\boldsymbol{x}) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_\varepsilon(\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \partial_i u_\varepsilon(\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}))(y_i - x_i)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

よって $\partial_i u_\varepsilon = J_\varepsilon[\partial_i u]$ に注意すると，

$$\begin{aligned}
|u_\varepsilon(\boldsymbol{y}) - u_\varepsilon(\boldsymbol{x})| &\le \sum_{i=1}^n \|\partial_i u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega')} |y_i - x_i| \\
&\le \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^\infty(\Omega)} |y_i - x_i| \\
&\le \left(\sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^\infty(\Omega)}{}^2 \right)^{1/2} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|.
\end{aligned}$$

よって $\{u_\varepsilon\}$ は K 上同程度連続．さらに $\{u_\varepsilon\}$ は K 上一様有界なので，アスコリ＝アルツェラの定理より，広義一様収束する部分列をもつ．極限 u_K は (7.1) をみたす．また，$\varepsilon \to +0$ のとき $\{u_\varepsilon\}$ はほとんどいたるところ u に収束する．よって u は K 上で u_K にほとんどいたるところ一致する． □

以上を用いると次が言える．

定理 7.3.14 凸開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ と自然数 m に対し，$L^\infty_m(\Omega) = C^{m-1,1}(\Omega)$.

7.3.4 ソボレフ不等式

7.2 節で証明したテスト関数に対する補間不等式を，軟化子を用いて可測関数に一般化する．

定理 7.3.15 $m \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty), m - \dfrac{n}{p} > 0$ とする．このとき定数 C が存在して，任意の $u \in L^p_m(\mathbb{R}^n)$ に対し，

$$|u|_{0,\infty} \leq C{|u|_{m,p}}^\theta {|u|_{0,p}}^{1-\theta}.$$

$0 < \theta < 1$ は両辺の重みが一致するように $0 = \theta\left(m - \dfrac{n}{p}\right) + (1-\theta)\dfrac{-n}{p}$ とする．

証明 定理 7.3.10 より，L^p_m ノルムで u に収束する $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ 上の列 $\{u_i\}$ が存在する．必要なら部分列を取ると，$u_i \to u$ は概収束でもある．

定理 7.2.13 より，$|u_i|_{0,\infty} \leq C{|u_i|_{m,p}}^\theta {|u_i|_{0,p}}^{1-\theta}$.

よって $|u_i - u|_{0,\infty} \to 0$ を言えばよい．

$|u_i - u_j|_{0,\infty} \leq C{|u_i - u_j|_{m,p}}^\theta {|u_i - u_j|_{0,p}}^{1-\theta}$ より，$\{u_i\}$ は $|\cdot|_{0,\infty}$ でコーシー列．よって $|u_i - u|_{0,\infty} \to 0, u \in C^{0,0}$. □

次の 2 つの定理もテスト関数による近似により同様に示される．

定理 7.3.16 $L^1_n(\mathbb{R}^n) \subset C^{0,0}(\mathbb{R}^n)$ であって，埋めこみ写像は連続である．実際，$|u|_{0,\infty} \leq |u|_{n,1}$ $(u \in L^1_n(\mathbb{R}^n))$.

定理 7.3.17 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, p, q, r \in [1, \infty), m - \dfrac{n}{p} \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}, \dfrac{-n}{r} < -\dfrac{n}{q} \leq m - \dfrac{n}{p}$ とする．このとき定数 C が存在して，

$$|u|_{0,q} \leq C{|u|_{m,p}}^\theta {|u|_{0,r}}^{1-\theta} \quad (u \in L^p_m(\mathbb{R}^n) \cap L^r(\mathbb{R}^n)).$$

$0 < \theta \leq 1$ は両辺の重みが一致するように $-\dfrac{n}{q} = \theta\left(m - \dfrac{n}{p}\right) + (1-\theta)\dfrac{-n}{r}$ とする．

$\theta = 1$ の場合，$-\dfrac{n}{q} = m - \dfrac{n}{p}$, $|u|_{0,q} \leq C|u|_{m,p}$.

次の補題はアスコリ＝アルツェラの定理を適用するために用いられる．

補題 7.3.2 $\mathbb{R}^n$ 上の C^m 級関数列 $\{u_\nu\}$ と点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ に対し，任意の多重指数 α, $|\alpha| \leq m$ について数列 $\{\partial^\alpha u_\nu(\boldsymbol{x}_0)\}$ は有界であるとし，$|\alpha| = m$ のときは任意の有界集合上で $\{\partial^\alpha u_\nu\}$ は同程度連続であるとする．このとき，任意の α, $|\alpha| \leq m$ に対し，$\{\partial^\alpha u_\nu\}$ は任意のコンパクト集合上で一様有界かつ同程度連続である．

定理 7.3.18 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $p, r \in [1, \infty)$, $m - \dfrac{n}{p} \geq \mu > 0$, $m - \dfrac{n}{p} \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする．このとき定数 C が存在して，任意の $u \in L^p_m(\mathbb{R}^n) \cap L^r(\mathbb{R}^n)$ に対し，

$$|u|_{\mu,\infty} \leq C {|u|_{m,p}}^{\theta} {|u|_{0,r}}^{1-\theta}.$$

$0 < \theta \leq 1$ は両辺の重みが一致するように $\mu = \theta\left(m - \dfrac{n}{p}\right) + (1-\theta)\dfrac{-n}{p}$ とする．

$\theta = 1$ の場合，$|u|_{m-\frac{n}{p},\infty} \leq C|u|_{m,p}$.

証明 $|\cdot|_{\mu,\infty}$ がノルムではないので一工夫必要になる．

定理 7.3.10 より，L^p_m ノルムと L^r ノルムで u に収束する $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ 上の列 $\{u_i\}$ が存在する．必要なら部分列を取ると，$u_i \to u$ は概収束でもある．

定理 7.2.9 (1) より，$|u_i|_{\mu,\infty} \leq C{|u_i|_{m,p}}^{\theta}{|u_i|_{0,r}}^{1-\theta}$.

よって $\|u_i - u\|_{\mu,\infty} \to 0$ を言えばよい．

(*) $\quad |u_i - u_j|_{\mu,\infty} \leq C{|u_i - u_j|_{m,p}}^{\theta}{|u_i - u_j|_{0,r}}^{1-\theta}$ を用いる．

$\mu \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の場合．補題 7.3.2 とアスコリ＝アルツェラの定理より，必要ならば部分列を取ると，$\{u_i\}$ は $\|\cdot\|_{\mu,\infty}$ でコーシー列．よって $\|u_i - u\|_{\mu,\infty} \to 0$, $u \in C^{\mu,0}$.

$\mu \in \mathbb{N}$ の場合．同様にして $\|u_i - u\|_{\mu-1,\infty} \to 0$, $u \in C^{\mu-1}$ が言える．さらに (*) より $\{u_i\}$ は $\|\cdot\|_{\mu,\infty}$ でコーシー列．よって $\|u_i - u\|_{\mu,\infty} \to 0$, $u \in C^{\mu,0}$ が言える． □

次の $m - \dfrac{n}{p} \in \mathbb{N}$ の場合を含む定理も，同様に定理 7.2.14 から証明される．

定理 7.3.19 $m, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $p \in [1, \infty)$, $m - \dfrac{n}{p} > k$ とする．このとき定数 C が存在して，任意の $u \in L^p_m(\mathbb{R}^n)$ に対し，

$$|u|_{k,\infty} \leq C{|u|_{m,p}}^{\theta}{|u|_{0,p}}^{1-\theta}.$$

$0 < \theta < 1$ は両辺の重みが一致するように $k = \theta\left(m - \dfrac{n}{p}\right) + (1-\theta)\dfrac{-n}{p}$ とする．

定理 7.3.20 $m, k \in \mathbb{N}$, $p, q, r \in [1, \infty)$, $m - \dfrac{n}{p} - k \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k \leq m$, $\dfrac{-n}{r} < k - \dfrac{n}{q} \leq m - \dfrac{n}{p}$ とする．このとき定数 C が存在して，

$$|u|_{k,q} \leq C{|u|_{m,p}}^{\theta}{|u|_{0,r}}^{1-\theta} \quad (u \in L^p_m(\mathbb{R}^n) \cap L^r(\mathbb{R}^n)).$$

$0 < \theta \leq 1$ は両辺の重みが一致するように $k - \dfrac{n}{q} = \theta\left(m - \dfrac{n}{p}\right) + (1-\theta)\dfrac{-n}{r}$ とする．

$\theta = 1$ の場合，$k - \dfrac{n}{q} = m - \dfrac{n}{p}$, $|u|_{k,q} \leq C|u|_{m,p}$.

証明 $|\cdot|_{k,q}$ はノルムでなく，さりとて $-\dfrac{n}{q}$ が $m-\dfrac{n}{p}$ と $-\dfrac{n}{r}$ の間にあるとは限らないので $|\cdot|_{0,q}$ を評価するわけにもいかない．そこで次のように考える．

定理 7.3.10 より，L^p_m ノルムと L^r ノルムで u に収束する $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ 上の列 $\{u_i\}$ が存在する．必要なら部分列を取ると，$u_i \to u$ は概収束でもある．

定理 7.2.12 より，$|u_i|_{k,q} \le C{|u_i|_{m,p}}^{\theta}{|u_i|_{0,r}}^{1-\theta}$．

よって $|u_i-u|_{k,q} \to 0$ を言えばよい．

$|u_i-u_j|_{k,q} \le C{|u_i-u_j|_{m,p}}^{\theta}{|u_i-u_j|_{0,r}}^{1-\theta}$ を用いる．

$\{u_j\}$ は u に概収束するので，ファトウの補題より，

$|u_i-u|_{k,q} \le C{|u_i-u|_{m,p}}^{\theta}{|u_i-u|_{0,r}}^{1-\theta}$．よって $|u_i-u|_{k,q} \to 0$． □

7.3.5 $\mathbb{R}^n$ 上のソボレフ埋めこみ定理

定理 7.3.16, 6.4.9 より，ただちに次が従う．

定理 7.3.21 $q \in [1,\infty]$ に対し，$L^1_n(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ であって埋めこみ写像は連続．

定理 7.3.22 $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty)$ に対し，$L^p_m(\mathbb{R}^n)$ は次の自然な連続埋めこみをもつ．

(1) $\lambda := m-\dfrac{n}{p} > 0$, $\lambda \notin \mathbb{N}$ の場合：$L^p_m \subset C^{\lambda,0}$．

(2) $\lambda < 0$ の場合：$-\dfrac{n}{p} \le -\dfrac{n}{q} \le \lambda$ である任意の q に対し，$L^p_m \subset L^q$．

(3) $\lambda = 0$ の場合：任意の $q \in [p,\infty)$ に対し，$L^p_m \subset L^q$．

(4) $\lambda \in \mathbb{N}$ の場合：$0 \le \mu < \lambda$ に対し，$L^p_m \subset C^{\mu,0}$．

証明 (1) 定理 7.3.17 より．

(2) 定理 7.3.19 の $k=0$ の場合より．

(3) m についての帰納法．$m=1$ の場合は定理 7.3.21 に他ならない．

$m \ge 2$ とする．$-\dfrac{n}{r} = 1-\dfrac{n}{p}$ とすると，$L^p_1 \subset L^r$．よって $L^p_m \subset L^r_{m-1}$．

帰納法の仮定より，任意の $q \in [r,\infty)$ に対し $L^r_{m-1} \subset L^q$．

また任意の $q \in [p,r]$ に対し，定理 6.4.9 より $L^p_m \subset L^p \cap L^r \subset L^q$．

(4) (3) より，任意の $q \in [p,\infty)$ に対し，$L^p_m \subset L^q_\lambda$．

任意の十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し，$q = \dfrac{n}{\varepsilon}$ とすると，(1) より，$L^q_\lambda \subset C^{\lambda-\varepsilon,0}$ が得られる． □

この定理は，(1) (2) についても，m に関する帰納法により，$m=1$ の場合に帰着して示すこともできる．

定理 7.3.22 (2) (3) より次が従う．

定理 7.3.23 $m, k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, $p, q \in [1,\infty)$, $m > k$, $m-\dfrac{n}{p} \ge k-\dfrac{n}{q} \ge -\dfrac{n}{p}$ ならば，$L^p_m(\mathbb{R}^n) \subset L^q_k(\mathbb{R}^n)$ であって埋めこみ写像は連続．

7.3.6　拡張作用素

定義 7.3.3 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対し，有界作用素 $E : L^p_m(\Omega) \to L^p_m(\mathbb{R}^n)$ で $Eu|\Omega = u$ をみたすものを **拡張作用素** という．

定理 7.3.24 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が拡張作用素をもつとき，$m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$ に対し，$L^p_m(\Omega)$ は次の自然な連続埋めこみをもつ．
(1) $\lambda := m - \dfrac{n}{p} > 0$, $\lambda \notin \mathbb{N}$ の場合：$L^p_m(\Omega) \subset C^{\lambda,0}(\overline{\Omega})$.
(2) $\lambda < 0$ の場合：$-\dfrac{n}{p} \leq -\dfrac{n}{q} \leq \lambda$ である任意の q に対し，$L^p_m(\Omega) \subset L^q(\Omega)$.
(3) $\lambda = 0$ の場合：任意の $q \in [p, \infty)$ に対し，$L^p_m(\Omega) \subset L^q(\Omega)$.
(4) $\lambda \in \mathbb{N}$ の場合：$0 \leq \mu < \lambda$ に対し，$L^p_m(\Omega) \subset C^{\mu,0}(\overline{\Omega})$.

証明 たとえば (1) の場合だと，

$$\|u\|_{\lambda,\infty,\Omega} \leq \|u\|_{\lambda,\infty,\mathbb{R}^n} \leq C\|u\|_{L^p_m(\mathbb{R}^n)} \leq C'\|u\|_{L^p_m(\Omega)}. \qquad \square$$

定理 7.3.25 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ の境界が C^m 級であるとき，拡張作用素 $E : L^p_m(\Omega) \to L^p_m(\mathbb{R}^n)$ が存在する．

証明 $\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$ の場合の構成の概略を述べる．

$\sum_{k=1}^m (-k)^j a_k = 1$ $(j = 1, \ldots, m)$ となるように a_k を取る．$(x', x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_n \leq 0$ に対しては $Eu(x', x_n) = \sum_{k=1}^m a_k u(x', -kx_n)$ とおけばよい．

境界が C^m 級の場合, 局所的に C^m 級の座標変換をして, $\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$ の場合に帰着させる．□

定理 7.3.26 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ の境界が C^1 級であるとき，ソボレフの埋めこみ定理 7.3.24 の主張が成立する．

証明 ソボレフの埋めこみ定理は帰納法により，$m = 1$ の場合に帰着され，それは C^1 級の境界をもつ Ω に対して成立する．□

7.3.7　L^p 空間の相対コンパクト集合

アスコリ＝アルツェラの定理 6.2.1, 7.1.4 と並んで基本的なのが, $p \in [1, \infty)$ と開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対し，$A \subset L^p(\Omega)$ の相対コンパクト性を特徴づける，後述の定理 7.3.27 である．

この場合，同程度連続性にかわる条件は,「$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} - \boldsymbol{h}$ に対する $u \in A$ の変化の L^p ノルムが, $|\boldsymbol{h}| \to 0$ のとき $u \in A$ について一様に 0 に収束する」というものになるが，軟化子を用いた近似によってアスコリ＝アルツェラの定理に帰着させるために，積分範囲を相対コンパクト開集合に制限する．そこでこれを補うために「Ω の境界・無限遠の方での $u \in A$ の L^p ノルムが $u \in A$ について一様に減衰する」という条件をつけ加える．

補題 7.3.3 $p \in [1, \infty]$, 有界集合 $A \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, $\rho \in C_0(\mathbb{R}^n)$ に対し，$A_\rho = \{\rho * u \mid u \in A\}$ とすると，A_ρ は一様有界かつ同程度連続である．

証明 ρ の台を K とすると，ヘルダーの不等式より，

$$|\rho * u(\boldsymbol{x})| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\rho(\boldsymbol{y})|\, |u(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|\, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \leq \|\rho\|_\infty\, \mu(K)^{1-\frac{1}{p}}\, \|u\|_{L^p}.$$

よって A_ρ は一様有界．

ρ は一様連続なので，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して，$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| < \delta$ ならば $|\rho(\boldsymbol{x}) - \rho(\boldsymbol{x}')| < \varepsilon$ がなりたつ．ゆえにヘルダーの不等式より，

$$\begin{aligned}
&|\rho * u(\boldsymbol{x}) - \rho * u(\boldsymbol{x}')| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\rho(\boldsymbol{y}) - \rho(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')|\, |u(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|\, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \leq \varepsilon\, (2\mu(K))^{1-\frac{1}{p}}\, \|u\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

よって A_ρ は同程度連続． □

補題 7.3.4 $p \in [1, \infty]$, 有界開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 有界集合 $A \subset L^p(\Omega)$ に対し，次が成立する．

(1) $\varepsilon > 0, \delta > 0$ とし, 任意の $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$, $|\boldsymbol{h}| < \delta$ と $u \in A$ に対し, $\|\tau_{\boldsymbol{h}} u - u\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon/3$ がなりたつとする．ただし Ω の外には u を 0 で拡張する．このとき $A \subset L^p(\Omega)$ の ε 網が存在する．

(2) $u \in A$ について一様に $\displaystyle\lim_{|\boldsymbol{h}|\to 0} \|\tau_{\boldsymbol{h}} u - u\|_{L^p(\Omega)} = 0$ ならば，$A \subset L^p(\Omega)$ は相対コンパクトである．

証明 $p \in (1, \infty]$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ とする．$u \in A, v \in L^q(\Omega)$ に対し，$\rho = \theta_\delta^{(n)}$ による軟化子を考えると，ヘルダーの不等式より，

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega (\rho * u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x}))v(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| \\
&\leq \int_{|\boldsymbol{h}|<\delta} \mathrm{d}\boldsymbol{h} \int_\Omega \rho(\boldsymbol{h})\, |u(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h}) - u(\boldsymbol{x})|\, |v(\boldsymbol{x})|\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\leq \int_{|\boldsymbol{h}|<\delta} \mathrm{d}\boldsymbol{h} \cdot \rho(\boldsymbol{h})\, \|\tau_{\boldsymbol{h}} u - u\|_{L^p(\Omega)}\, \|v\|_{L^q(\Omega)}.
\end{aligned}$$

よってリースの表現定理 6.4.28, 6.4.29 より，

$$\|\rho * u - u\|_{L^p(\Omega)} \leq \int_{|\boldsymbol{h}|<\delta} \rho(\boldsymbol{h})\, \|\tau_{\boldsymbol{h}} u - u\|_{L^p(\Omega)}\, \mathrm{d}\boldsymbol{h} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

この不等式は $p = 1$ でも成立する．

補題 7.3.3 とアスコリ＝アルツェラの定理 7.1.4 より，$A_{\rho,\overline{\Omega}} = \{\rho * u|\overline{\Omega} \mid u \in A\}$ は $C(\overline{\Omega})$ で相対コンパクト．よって $A_{\rho,\Omega} = \{\rho * u|\Omega \mid u \in A\}$ は $L^p(\Omega)$ で相対コンパクト．よって $u_1, \ldots, u_n \in A$ が存在して，$\rho * u_1, \ldots, \rho * u_n$ は $A_{\rho,\Omega} \subset L^p(\Omega)$ の $\varepsilon/3$ 網になる．ゆえに任意の $u \in A$ に対し j が存在して $\|\rho * u - \rho * u_j\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon/3$. よって，

$$\|u-u_j\|_{L^p(\Omega)}$$
$$\leq \|u-\rho*u\|_{L^p(\Omega)}+\|\rho*u-\rho*u_j\|_{L^p(\Omega)}+\|\rho*u_j-u_j\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

ゆえに $u_1, \ldots, u_n$ は $A \subset L^p(\Omega)$ の ε 網になる．(1) が証明された．

(2) は (1) よりただちに従う． □

定理 7.3.27 $p \in [1, \infty)$, 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対し，$A \subset L^p(\Omega)$ が相対コンパクトであるのは，次の 3 条件が成立することと同値である．

(1) A は有界．

(2) Ω の任意の相対コンパクト開集合 U に対し，$\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$, $|\boldsymbol{h}| \to 0$ のとき，$u \in A$ について一様に $\lim_{|\boldsymbol{h}|\to 0} \|\tau_{\boldsymbol{h}} u - u\|_{L^p(U)} = 0$.

(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，相対コンパクト開集合 $U \subset \Omega$ が存在して，$\sup\{\|u\|_{L^p(\Omega\setminus\overline{U})} \mid u \in A\} < \varepsilon$.

証明 (1) (2) (3) を仮定すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，相対コンパクト開集合 $U \subset \Omega$ が存在して $\sup\{\|u\|_{L^p(\Omega\setminus\overline{U})} \mid u \in A\} < \varepsilon$.

補題 7.3.4 より，$u_1, \ldots, u_n \in A$ が存在して，$u_1|U, \ldots, u_n|U$ が $A_U = \{u|U \mid u \in A\}$ の ε 網になる．

したがって任意の $u \in A$ に対し j が存在して，$\|u-u_j\|_{L^p(U)} < \varepsilon$. よって

$$\|u-u_j\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u-u_j\|_{L^p(U)} + \|u\|_{L^p(\Omega\setminus\overline{U})} + \|u_j\|_{L^p(\Omega\setminus\overline{U})} < 3\varepsilon.$$

ゆえに $u_1, \ldots, u_n$ は $A \subset L^p(\Omega)$ の 3ε 網になる．よって $A \subset L^p(\Omega)$ は相対コンパクト．

逆に $A \subset L^p(\Omega)$ が相対コンパクトであるとする．

あきらかに A は有界なので (1) が言えた．

任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$u_1, \ldots, u_n \in A$ を $A \subset L^p(\Omega)$ の ε 網とする．

任意の相対コンパクト開集合 $U \subset \Omega$ に対し，$\delta > 0$ が存在して，$|\boldsymbol{h}| < \delta$ ならば，$\|\tau_{\boldsymbol{h}} u_j - u_j\|_{L^p(U)} < \varepsilon$. ゆえに

$$\|\tau_{\boldsymbol{h}} u - u\|_{L^p(U)}$$
$$\leq \|\tau_{\boldsymbol{h}} u - \tau_{\boldsymbol{h}} u_j\|_{L^p(U)} + \|\tau_{\boldsymbol{h}} u_j - u_j\|_{L^p(U)} + \|u_j - u\|_{L^p(U)} < 3\varepsilon.$$

(2) が示された．

コンパクト集合の列 $\{K_m\}$ で，$K_m \subset K_{m+1}{}^\circ$, $\Omega = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m$ となるものが取れる．

任意の $f \in L^p(\Omega)$ に対し，単調収束定理より，$\lim_{m\to\infty} \|f\|_{L^p(\Omega\setminus K_m)} = 0$. よって任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$m_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $j = 1, \ldots, n$ に対し，$\|u_j\|_{L^p(\Omega\setminus K_{m_0})} < \varepsilon$. そこで $U = K_{m_0+1}{}^\circ$ とおく．任意の $u \in A$ に対し，$\|u-u_j\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$ となる j を取ると，

$$\|u\|_{L^p(\Omega\setminus\overline{U})} \leq \|u-u_j\|_{L^p(\Omega\setminus\overline{U})} + \|u_j\|_{L^p(\Omega\setminus\overline{U})} < 2\varepsilon.$$

よって (3) が示された. □

7.3.8 コンパクト性定理

L^p 空間の相対コンパクト集合の特徴づけ（定理 7.3.27）をソボレフ空間の場合に適用するために，2 つの補題を準備する.

有界開集合上，$q<p$ に対し $L^p \subset L^q$ はコンパクト作用素ではないが，次は成立する.

補題 7.3.5 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界開集合，$1 \leq q < p \leq \infty$ とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，Ω のコンパクト部分集合 K が存在して，任意の $u \in L^p(\Omega)$, $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq 1$ に対し，$\|u\|_{L^q(\Omega\setminus K)} < \varepsilon$.

証明 ヘルダーの不等式より，

$$\|u\|_{L^q(\Omega\setminus K)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega\setminus K)}\, \mu(\Omega\setminus K)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leq \mu(\Omega\setminus K)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

$\mu(\Omega\setminus K)$ はいくらでも 0 に近づけることができる. □

次の補題は平均値の定理の L^p 版である. ここで，$\nabla u = (\partial_i u)_{i=1,\ldots,n}$, $|\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2$, $\|\nabla u\|_{L^p} = \|\,|\nabla u|\,\|_{L^p}$ とする.

補題 7.3.6 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界開集合，$p \in [1,\infty]$, $u \in L^p_1(\mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{h} = (h_i) \in \mathbb{R}^n$ とすると，$\|\tau_{\boldsymbol{h}} u - u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\, |\boldsymbol{h}|$.

証明 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し，

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (\tau_{\boldsymbol{h}} u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x}))\, \varphi(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} u(\boldsymbol{x})(\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - \varphi(\boldsymbol{x}))\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\; u(\boldsymbol{x}) \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})\, \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\; u(\boldsymbol{x}) \int_0^1 \sum_{i=1}^n h_i \partial_i \varphi(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})\, \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 \mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n h_i \partial_i u(\boldsymbol{x})\, \varphi(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

なので，$p^{-1}+q^{-1}=1$ とすると，ヘルダーの不等式より，

$$\|(\tau_{\boldsymbol{h}} u - u)\varphi\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\, |\boldsymbol{h}|\, \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}.$$

よって $p \neq 1$ の場合は定理 6.4.11 とリースの表現定理 6.4.28, 6.4.29 より結論を得る. $p=1$ の場合は，$0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(\boldsymbol{x}) = 1$ $(|\boldsymbol{x}| \leq R)$, $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ $(|\boldsymbol{x}| \geq 2R)$ となるものを取り，$R \to \infty$ とすればよい. □

次の 2 つの定理はレリッヒ＝コンドラショフの定理とよばれる．

定理 7.3.28 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界開集合で C^1 級の境界をもつものとし，$p \in [1, \infty)$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m - \dfrac{n}{p} > \mu \geq 0$ とする．このとき埋めこみ写像 $L^p_m(\Omega) \subset C^\mu(\overline{\Omega})$ はコンパクト作用素である．すなわち $L^p_m(\Omega)$ の有界列は，$C^\mu(\overline{\Omega})$ において収束する部分列をもつ．

証明 $m - \dfrac{n}{p} > \mu' > \mu$ とすると，ソボレフの埋めこみ定理 7.3.26 より，包含写像 $L^p_m(\Omega) \subset C^{\mu'}(\overline{\Omega})$ は有界，定理 7.1.5 より，$C^{\mu'}(\overline{\Omega}) \subset C^\mu(\overline{\Omega})$ はコンパクト． □

定理 7.3.29 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界開集合で C^1 級の境界をもつものとし，$p, q \in [1, \infty)$, $m, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，$m > k$, $m - \dfrac{n}{p} > k - \dfrac{n}{q}$ とする．このとき埋めこみ写像 $L^p_m(\Omega) \subset L^q_k(\Omega)$ はコンパクト作用素である．すなわち $L^p_m(\Omega)$ の有界列は，$L^q_k(\Omega)$ において収束する部分列をもつ．

証明 $k = 0$, $m = 1$ の場合に定理は帰着される．
(1) $1 - \dfrac{n}{p} > 0$ の場合，定理 7.3.28 より，$L^p_1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ はコンパクト作用素，$C(\overline{\Omega}) \subset L^q(\Omega)$ は有界なので，結論が従う．
(2) $1 - \dfrac{n}{p} < 0$ の場合，$-\dfrac{n}{p'} = 1 - \dfrac{n}{p}$, $q \in [1, p')$ とする．

ソボレフの埋めこみ定理 7.3.26 より，$q \in [p, p')$ の場合 $L^p_1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. $q \in [1, p)$ の場合 $L^p_1(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. よって有界集合 $A \subset L^p_1(\Omega)$ は $L^q(\Omega)$ でも有界であり，定理 7.3.27 の条件 (1) が言えた．

また，$L^p_1(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega)$. よって A は $L^{p'}(\Omega)$ で有界．よって補題 7.3.5 より，定理 7.3.27 の条件 (3) が示される．

$-\dfrac{n}{q} = (1-\theta)\left(1 - \dfrac{n}{p}\right) + \theta(-n)$, $U \subset \Omega$ を相対コンパクト開集合とすると，ヘルダーの不等式より，$u \in A$ に対し，

$$\|\tau_{\boldsymbol{h}} u - u\|_{L^q(U)} \leq \|\tau_{\boldsymbol{h}} u - u\|_{L^p(U)}{}^{1-\theta}\, \|\tau_{\boldsymbol{h}} u - u\|_{L^1(U)}{}^{\theta}.$$

ここで $\|\tau_{\boldsymbol{h}} u - u\|_{L^p(U)}\| \leq 2\|u\|_{L^p(\Omega)}$ であり，補題 7.3.6 より，

$$\|\tau_{\boldsymbol{h}} u - u\|_{L^1(U)} \leq \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}\, |\boldsymbol{h}| \leq \mu(\Omega))^{1-\frac{1}{p}}\, \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\, |\boldsymbol{h}|.$$

したがって定理 7.3.27 の条件 (2) が言え，$A \subset L^q(\Omega)$ が相対コンパクトであることが示された．
(3) $1 - \dfrac{n}{p} = 0$ の場合，$0 > 1 - \dfrac{n}{r} > -\dfrac{n}{q}$ とすると，$\mu(\Omega) < \infty$ より $L^p_1(\Omega) \subset L^r_1(\Omega)$ なので，(2) に帰着される． □

Ω が有界であることは必要である．たとえば $u \in C^\infty_0(\mathbb{R})$, $u \not\equiv 0$ に対し，$\tau_n u(x) = u(x-n)$ $(n \in \mathbb{N})$ は $L^p_m(\mathbb{R})$ で収束する部分列をもたない．

7.3.9 コンパクト・リーマン多様体上のソボレフ空間

リーマン多様体 (M, g) 上には，リーマン計量 g の体積要素の定める測度 μ_g がある．

コンパクト・リーマン多様体 M 上のエルミート・ベクトル束 E に対し，C^∞ 切断全体のなすベクトル空間 $\Gamma(M, E)$ 上にソボレフ・ノルム $\|\cdot\|_{m,p}$ が 1 の分割を用いて定義される．このノルムによる完備化 $L^p_m\Gamma(M, E)$ を **ソボレフ空間** という．また，ヘルダー・ノルム $\|\cdot\|_{m+h,\infty}$ $(0 \leq h < 1)$ も定義される．このノルムに対して連続な切断全体のなすベクトル空間を $C^{m+h} = C^{m+h,0}\Gamma(M, E)$ とする．これらに対して，ソボレフの埋めこみ定理（の一般化）がなりたつ．

定理 7.3.30 $m \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty)$ に対し，$L^p_m = L^p_m\Gamma(M, E)$ は次の自然な連続埋めこみをもつ．

(1) $\lambda := m - \dfrac{n}{p} > 0, \lambda \notin \mathbb{N}$ の場合：$L^p_m \subset C^\lambda$.

(2) $\lambda < 0$ の場合：$-\dfrac{n}{p} \leq -\dfrac{n}{q} \leq \lambda$ である任意の q に対し，$L^p_m \subset L^q$.

(3) $\lambda = 0$ の場合：任意の $q \in [p, \infty)$ に対し，$L^p_m \subset L^q$.

(4) $\lambda \in \mathbb{N}$ の場合：$0 \leq \mu < \lambda$ に対し，$L^p_m \subset C^\mu$.

レリッヒ＝コンドラショフの定理（の一般化）もなりたつ．

定理 7.3.31 $p \in [1, \infty), m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, m - \dfrac{n}{p} > \mu \geq 0$ とすると，埋めこみ写像 $L^p_m\Gamma(M, E) \subset C^\mu\Gamma(M, E)$ はコンパクト作用素である．

定理 7.3.32 $p, q \in [1, \infty), m, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, m > k, m - \dfrac{n}{p} > k - \dfrac{n}{q}$ とすると，埋めこみ写像 $L^p_m\Gamma(M, E) \subset L^q_k\Gamma(M, E)$ はコンパクト作用素である．

第 8 章
楕円型作用素と熱核

楕円型作用素は，コーシー＝リーマン作用素やラプラシアンに代表される偏微分作用素であり，各点での関数の値を，まわりの点での平均と比較するものである．

楕円型作用素に対しては，常微分方程式のスツルム＝リウヴィユ型境界値問題に似た状況が再現され，固有値・固有関数を用いた理解が可能になる．

8.1 コーシー＝リーマン作用素

8.1.1 主表象と楕円型作用素

$\mathbb{R}^n$ の座標を $(x^1, \ldots, x^n)$ とする．$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，$C^\infty(U)$ を U 上の複素数値 C^∞ 関数全体とする．微分作用素 $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ によって生成される $C^\infty(U)$ 上の代数を $\mathcal{D}(U)$ とする．$k \geq 0$ 階以下の微分作用素からなる部分ベクトル空間を $\mathcal{D}^k(U)$ とする．$\mathcal{D}^0(U) = C^\infty(U)$, $\mathcal{D}^p(U) \cdot \mathcal{D}^q(U) \subset \mathcal{D}^{p+q}(U)$ がなりたつ．$\mathbb{C}^n$ 上の k 次対称テンソル積を $S^k(\mathbb{C}^n)$ とすると，$\mathcal{D}^k(U)/\mathcal{D}^{k-1}(U) \cong C^\infty(U) \otimes S^k(\mathbb{C}^n)$ である．射影

$$\sigma_k : \mathcal{D}^k(U) \to C^\infty(U) \otimes S^k(\mathbb{C}^n)$$

を **主表象** という．$\sigma_k(i\partial_{j(1)} \cdots i\partial_{j(k)}) = \xi_{j(1)} \cdots \xi_{j(k)}$ とする．これは，$\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}$ に作用させることを思っているのである．

$\displaystyle\bigoplus_{k\geq 0} S^k(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ により，$C^\infty(U) \otimes S^k(\mathbb{C}^n)$ の元を $U \times \mathbb{R}^n$ 上の複素数値関数と見なす．

有限次元複素ベクトル空間 V, W に対し，$P \in \mathcal{D}^k(U) \otimes \mathrm{Hom}(V, W)$ は，k 階以下の微分作用素

$$P : C^\infty(U) \otimes V \to C^\infty(U) \otimes W$$

と見なすことができ，その主表象が $C^\infty(U)$ 上の準同型

$$\sigma_k(P) : C^\infty(U) \otimes V \to (C^\infty(U) \otimes S^k(\mathbb{C}^n)) \otimes W$$

として定義される．$\sigma_k(P)$ は，$\mathrm{Hom}(V, W)$ に値をとる $U \times \mathbb{R}^n$ 上の関数と見なすことができる．

微分作用素 $P \in \mathcal{D}^k(U) \otimes \mathrm{Hom}(V, W)$ が **楕円型** であるとは，主表象 $\sigma_k(P)$ が $U \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ の各点で V から W への同型を与えることとする．

ラプラシアン $\Delta = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j)^2 : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ は 2 階楕円型作用素である．主表象は，$\sigma_2(\Delta) = -\sum_{j=1}^{n} (\xi_j)^2$ である．

$n = 2$ の場合，コーシー＝リーマン作用素 $\partial_1 + i\partial_2$ は 1 階楕円型作用素である．主表象は，$\sigma_1(i(\partial_1 + i\partial_2)) = \xi_1 + i\xi_2$ である．

n が一般の場合に 1 階楕円型作用素を構成したければ，r 次複素正方行列 $A_1, \ldots, A_n$ で，任意の $(\xi_j) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対し，$\xi_1 A_1 + \cdots + \xi_n A_n$ が非退化になるものを見つければよい．それには後の章で扱うクリフォード代数を用いる．このとき，主表象 $\xi_1 A_1 + \cdots + \xi_n A_n$ によって，$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ から $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ への連続写像が得られる．

k 次元球面 $(k \geq 2)$ から弧状連結位相空間 X への連続写像のホモトピー類全体の集合 $\pi_k(X)$ には，アーベル群の構造が自然に入る．これを k 次の **ホモトピー群** という．今の場合，主表象がリー群 $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ の $n-1$ 次ホモトピー群の元を与えている．ホモトピー群は重要だが難しい不変量である．楕円型作用素がこれに光を当ててくれている．

8.1.2　リーマン球面上のコーシー＝リーマン作用素

リーマン球面 $M = \mathrm{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の開集合

$$U_0 = M \setminus \{\infty\}, \quad U_\infty = M \setminus \{0\}$$

と座標 $z : U_0 \to \mathbb{C}$, $w : U_\infty \to \mathbb{C}$ を，$U_0 \cap U_\infty$ 上 $zw = 1$ となるように取る．このとき，$\mathrm{d}\bar{z} = -\bar{w}^{-2}\mathrm{d}\bar{w}$ である．

整数 n に対し，

$$H^0(n) = \{f(z) \in C^\infty(U_0) \mid w^n f(w^{-1}) : C^\infty \text{ at } w = 0\},$$
$$H^1(n) = \{g(z) \in C^\infty(U_0) \mid w^n \bar{w}^{-2} g(w^{-1}) : C^\infty \text{ at } w = 0\}$$

とし，コーシー＝リーマン作用素 $\bar{\partial} = \bar{\partial}^{(n)} : H^0(n) \to H^1(n)$ を，

$$\bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2) f$$

により定義する．

$M = \mathrm{P}^1(\mathbb{C})$ 上の超平面束を H とすると，$H^0(n)$ は $H^{\otimes n}$ の C^∞ 切断の空間と同一視できる．w^n は $H^{\otimes n}$ の変換関数である．このとき次がなりたつ．

定理 8.1.1 $\operatorname{ind}(\bar\partial^{(n)}) = n+1.$

この定理はリーマン＝ロッホの定理の特別な場合である．

$n \geq 0$ のとき，核 $\operatorname{Ker}(\bar\partial^{(n)})$ は，z の n 次以下の多項式全体になる．$n < 0$ のとき，$\operatorname{Ker}(\bar\partial^{(n)}) = \{0\}$ である．

$\bar\partial^{(n)}$ の像の方は，次節以降の議論を適用すれば計算できる．ここではそれを考えるかわりに，

$$S = \mathbb{C}[z, \bar\zeta] \subset C^\infty(U_0), \quad \bar\zeta = \frac{\bar z}{1 + z\bar z}$$

とおき，コーシー＝リーマン作用素を $S^a(n) = S \cap H^a(n)$, $(a = 0, 1)$ に制限したもの $\bar\partial_S^{(n)} : S^0(n) \to S^1(n)$ を調べる．ここで，

$$\bar\zeta = \frac{w}{w\bar w + 1}, \quad z\bar\zeta - 1 = -\frac{w\bar w}{w\bar w + 1} \in C^\infty(M).$$

また，$\bar\partial\bar\zeta = \dfrac{1}{(1+z\bar z)^2} = (1 - z\bar\zeta)^2 \in S$ より，$\bar\partial$ は S 上の作用素 $\bar\partial_S : S \to S$ を定める．$\bar\partial\bar\zeta = (1 + z\bar z)^{-2} = w^2\bar w^2(w\bar w + 1)^{-2} \in S^1(-2)$ に注意すると，

$$\bigcup_n S^1(n) = S \cdot \bar\partial\bar\zeta = \partial_S(S).$$

$\operatorname{Ker}(\bar\partial_S) = \mathbb{C}[z]$ および $z^n = w^{-n} \in S^0(n) \setminus S^0(n-1)$ $(n \geq 0)$ より，

$$\dim \operatorname{Ker}(\bar\partial_S^{(n)}) = \begin{cases} n+1 & n \geq -1 \\ 0 & n < -1 \end{cases}$$

が言える．また，

$$z^m\bar\zeta^k(z\bar\zeta - 1) = w^{-m}\frac{w^k}{(w\bar w + 1)^k}\frac{-w}{w\bar w + 1} \in S^0(m-k-1)$$

$$\bar\partial(z^m\bar\zeta^k(z\bar\zeta - 1)) = [(k+1)z^{m+1}\bar\zeta^k - kz^m\bar\zeta^{k-1}] \cdot \partial\bar\zeta \in S^1(m-k-1)$$

より，$m \geq k$ のとき，$\bar\partial_S^{(m-k-1)}$ は全射である．すなわち，$n \geq -1$ のとき，$\bar\partial_S^{(n)}$ は全射である．$n \leq -2$ のとき，

$$(z\bar\zeta - 1)^{-n-2-k}\bar\zeta^k \cdot \partial\bar\zeta \in S^1(n) \quad (k = 0, 1, \ldots, -n-2)$$

が $\bar\partial_S^{(n)}$ の余核の基底を与える．よって，$n < -1$ のとき，$\bar\partial_S^{(n)}$ の余核の次元は $-n-1$ である．

以上により次が言えた．

定理 8.1.2 $\operatorname{ind}(\bar\partial_S^{(n)}) = n+1.$

8.2 ラプラシアン

8.2.1 $\boldsymbol{\lambda - \Delta}$ に対するアプリオリ評価

開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上のコンパクト台をもつ複素数値 C^k 関数 $(0 \leq k \leq \infty)$ 全

体のなす $\mathbb{C}$ 上の可換代数を $C_0^k(U)$ と書く．$C_0(U) = C_0^0(U)$ とする．

補題 8.2.1 $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ に対し，$\lambda u - \Delta u = f$ ならば，

$$\lambda^2 \|u\|_{L^2}{}^2 + 2\lambda \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j u\|_{L^2}{}^2 + \sum_{j,\,k=1}^{n} \|\partial_j \partial_k u\|_{L^2}{}^2 = \|f\|_{L^2}{}^2.$$

さらに $\lambda \geq 0$ ならば，

$$\lambda \, \|u\|_{L^2} + 2\lambda^{1/2} \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j u\|_{L^2} + \sum_{j,\,k=1}^{n} \|\partial_j \partial_k u\|_{L^2} \leq (n+1) \, \|f\|_{L^2}.$$

不等式の方は上の等式とコーシー＝シュワルツの不等式から従う．

この補題に対し 2 つの証明を与える．

証明（フーリエ解析による）

$g(\boldsymbol{x})$ のフーリエ変換を $\hat{g}(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i\xi\cdot x} \, g(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ とすると，

$$(\lambda + \xi \cdot \xi) \, \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi). \qquad \therefore \quad (\lambda + \xi \cdot \xi)^2 \, |\hat{u}(\xi)|^2 = |\hat{f}(\xi)|^2.$$

よって，

$$\lambda^2 \, |\hat{u}(\xi)|^2 + 2\lambda \sum_{j=1}^{n} |\xi_j \hat{u}(\xi)|^2 + \sum_{j,\,k=1}^{n} |\xi_j \xi_k \hat{u}(\xi)|^2 = |\hat{f}(\xi)|^2.$$

両辺を $\xi \in \mathbb{R}^n$ で積分してパーセバルの等式を用いれば結論が得られる． □

証明（ベクトル解析による）

$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2}$ とすると，

$$\|f\|^2 = \lambda^2 \, \|u\|^2 + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} (\overline{u} \, \Delta u + u \, \Delta \overline{u}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta \overline{u} \cdot \Delta u \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

ガウスの発散定理より，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \overline{u} \, \Delta u \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j (\overline{u} \, \partial_j u) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_j u|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_j u|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \\
\int_{\mathbb{R}^n} \Delta \overline{u} \cdot \Delta u \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j (\partial_j \overline{u} \cdot \Delta u) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j \overline{u} \cdot \Delta \partial_j u \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= -\sum_{j,\,k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\partial_k (\partial_j \overline{u} \cdot \partial_k \partial_j u) - |\partial_k \partial_j u|^2 \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \sum_{j,\,k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_k \partial_j u|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

よって結論が従う． □

よって定理 7.3.10 より，次が言える．

定理 8.2.1 $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in L_2^2(\mathbb{R}^n)$ に対し，

$$\lambda^2 \|u\|_{L^2}{}^2 + 2\lambda \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j u\|_{L^2}{}^2 + \sum_{j,\,k=1}^{n} \|\partial_j \partial_k u\|_{L^2}{}^2 = \|\lambda u - \Delta u\|_{L^2}{}^2.$$

この定理より次が従う．

定理 8.2.2 $\lambda > 0$, $u \in L_2^2(\mathbb{R}^n)$, $\Delta u = \lambda u$ ならば，$u = 0$.

定理 8.2.3 定数 $C > 0$ が存在して，任意の $u \in L_2^2(\mathbb{R}^n)$ に対し，

$$\|u\|_{L_2^2} \le C\,(\|u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2}).$$

このタイプの不等式を **アプリオリ評価** という．

8.2.2 $\boldsymbol{\lambda - \Delta}$ の像

補題 8.2.2 $\lambda > 0$, $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\Delta u - \lambda u \ge 0$ とする．このとき u が上に有界ならば $u \le 0$ である．

証明 $\varepsilon > 0$, $f(\boldsymbol{x}) = \cosh(\varepsilon\|\boldsymbol{x}\|)$ ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$) とおく．$\cosh(\sqrt{x})$ は C^∞ 級なので $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ であり，

$$\Delta f = \left(\varepsilon^2 + (n-1)\frac{\varepsilon}{\|x\|}\tanh(\varepsilon\|x\|)\right) f \le (\varepsilon^2 + (n-1)\varepsilon^2) = n\varepsilon^2 f.$$

よって $n\varepsilon^2 < \lambda$ となるように ε を取ると，$\Delta f - \lambda f < 0$.

$v = f^{-1}u$ とおくと，$\Delta u = f\Delta v + 2\sum_{j=1}^{n} \partial_j f \cdot \partial_j v + (\Delta f)v$.

よって，$f\Delta v + 2\sum_{j=1}^{n} \partial_j f \cdot \partial_j v + (\Delta f - \lambda f)v \ge 0$.

u が上に有界であり，$\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$ のとき $f(\boldsymbol{x}) \to 0$ なので，v はある点 $\boldsymbol{x}_0$ で最大値をとる．$\partial_j v(\boldsymbol{x}_0) = 0$, $\Delta v(\boldsymbol{x}_0) \le 0$, $f > 0$, $\Delta f - \lambda f < 0$ より，$v(\boldsymbol{x}_0) \le 0$. よって $v \le 0$, $u \le 0$ が言える． □

系 8.2.3 $\lambda > 0$, $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\Delta u = \lambda u$ とする．u が有界ならば $u \equiv 0$ である．

定理 8.2.4 $p \in [1, \infty)$, $\lambda > 0$ とすると，$(\lambda - \Delta)\,C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ で稠密である．

証明 $q \in (1, \infty]$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ とする．稠密でないとすると，ハーン＝バナッハの定理 6.3.2 とリースの表現定理 6.4.28, 6.4.29 より，$g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $\|g\|_{L^q} > 0$ が存在して，

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\,(\lambda u - \Delta u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \quad (u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

よって，$(\lambda - \Delta)(g * u) = g * (\lambda u - \Delta u) = 0$.

ヘルダーの不等式より $|g * u(\boldsymbol{x})| \leq \|g\|_{L^q}\,\|u\|_{L^p}$ となり，$g * u$ は有界．よって系 8.2.3 より，$g * u = 0$．これが任意の $u \in C_0^\infty$ に対してなりたつので，$g = 0$．これは $\|g\|_{L^q} > 0$ に矛盾． □

8.2.3　方程式 $\boldsymbol{\lambda u - \Delta u = f}$ の解の存在・一意性・なめらかさ

熱方程式の解 $p(t, \boldsymbol{x}) = (4\pi t)^{-n/2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4t}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ を考えると，

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \Delta p, \quad \int_{\mathbb{R}^n} p(t, x)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1.$$

$\lambda > 0$ に対し，$G_\lambda(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} p(t, \boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t$ とおくと，$G_\lambda \in L^1(\mathbb{R}^n)$，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} G_\lambda\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda^{-1}$.

フビニの定理より，$f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ に対し，$G_\lambda * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ である．多重指数 α に対し，$\partial^\alpha(G_\lambda * f) = (\partial^\alpha G_\lambda) * f$．さらに，

$$(\lambda - \Delta)(G_\lambda * f) = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}(p * f)\,\mathrm{d}t = f.$$

$G_\lambda(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$ を作用素 $\lambda - \Delta$ の **グリーン関数** という．

定理 7.3.2 より，任意の $p \in [1, \infty]$ に対し，$f \mapsto G_\lambda * f$ は L^p から L^p への有界作用素を与え，$\|G_\lambda * f\|_{L^p} \leq \lambda^{-1}\,\|f\|_{L^p}$.

$u \in C_0^2$ に対し，$u = G_\lambda * (\lambda - \Delta)u$．両辺は L_2^2 から L^2 への有界作用素なので，定理 7.3.10 より，$u \in L_2^2$ に対しても，$u = G_\lambda * (\lambda - \Delta)u$.

定理 8.2.5　$p \in [1, \infty)$，$\lambda > 0$ とすると，任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対し，$\lambda u - \Delta u = f$ となる $u \in L_2^2(\mathbb{R}^n)$ がただ一つ存在する．

証明　一意性は定理 8.2.2 より．

定理 7.3.8 より，L^2 ノルムで f に収束する列 $f_m \in C_0$ が存在する．$(\lambda - \Delta)(G_\lambda * f_m) = f_m$ なので，定理 8.2.1 より，$u_m = G_\lambda * f_m$ は L_2^2 におけるコーシー列．極限を u とおくと，$\lambda u - \Delta u = f$. □

グリーン関数のかわりに定理 8.2.4 を用いて列 u_m を取ることもできる．

定理 8.2.6　k を自然数，$\lambda > 0$, $u \in L_2^2(\mathbb{R}^n)$, $\lambda u - \Delta u \in L_k^2(\mathbb{R}^n)$ とすると，$u \in L_{k+2}^2(\mathbb{R}^n)$.

証明　$f = \lambda u - \Delta u$ とおく．$f_m \in C_0^k$ を L_k^2 ノルムで f に収束する列とすると，$|\alpha| \leq k$ に対し，$(\lambda - \Delta)(G_\lambda * \partial^\alpha f_m) = \partial^\alpha f_m$．よって定理 8.2.1 より，$\partial^\alpha(G_\lambda * f_m) = G_\lambda * \partial^\alpha f_m$ は L_2^2 におけるコーシー列になる．したがっ

て $G_\lambda * f_m$ は L^2_{k+2} におけるコーシー列．極限は $G_\lambda * f = u$ に一致するので，$u \in L^2_{k+2}$． □

以上により，次が言える．

定理 8.2.7 k を自然数，$\lambda > 0$, $f \in L^2_k(\mathbb{R}^n)$ とすると，$u \in L^2_{k+2}(\mathbb{R}^n)$ がただ一つ存在して，$\lambda u - \Delta u = f$．さらに，任意の多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| \leq k$ に対し，

$$\lambda^2 \|\partial^\alpha u\|_{L^2}{}^2 + 2\lambda \sum_{j=1}^n \|\partial^\alpha \partial_j u\|_{L^2}{}^2 + \sum_{j,\,k=1}^n \|\partial^\alpha \partial_j \partial_k u\|_{L^2}{}^2 = \|\partial^\alpha f\|_{L^2}{}^2.$$

したがって n, k のみによる定数 $C > 0$ が存在して，

$$\lambda \|u\|_{L^2_k} + \sum_{j,\,k=1}^n \|\partial_j \partial_k u\|_{L^2_k} \leq C \, \|f\|_{L^2_k}.$$

8.2.4 2 階楕円型作用素に対するアプリオリ評価

ここで満を持して定理 7.2.10 を用いる．

定理 8.2.8 $b_1, \ldots, b_n, c \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し，$L = \Delta + \sum_{j=1}^n b_j \partial_j + c$ とおくと，定数 $\lambda_0 > 0$ が存在して，任意の $\lambda \geq \lambda_0$, $u \in C^2_0(\mathbb{R}^n)$ に対し，

$$\lambda \, \|u\|_{L^2} + 4\lambda^{1/2} \sum_{j=1}^n \|\partial_j u\|_{L^2} + \sum_{j,\,k=1}^n \|\partial_j \partial_k u\|_{L^2} \leq 2(n+1) \, \|Lu - \lambda u\|_{L^2}.$$

よって定数 $C > 0$ が存在して，

$$\|u\|_{L^2_2} \leq C(\|u\|_{L^2} + \|Lu\|_{L^2}) \quad (u \in C^2_0(\mathbb{R}^n)).$$

証明 補題 8.2.1 より，定数 $C_1 > 0$ が存在して，$\lambda > 0$ に対し，

$$\lambda \, \|u\|_{L^2} + 2\lambda^{1/2} \sum_{j=1}^n \|\partial_j u\|_{L^2} + \sum_{j,\,k=1}^n \|\partial_j \partial_k u\|_{L^2} \leq (n+1) \, \|\Delta u - \lambda u\|_{L^2}$$
$$\leq (n+1) \, \|Lu - \lambda u\|_{L^2} + C_1 (\sum_{j=1}^n \|\partial_j u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}).$$

定理 7.2.10 より，定数 $C_2 > 0$ が存在して，

$$C_1 \sum_{j=1}^n \|\partial_j u\|_{L^2} \leq \frac{1}{2} \sum_{j,\,k=1}^n \|\partial_j \partial_k u\|_{L^2} + C_2 \, \|u\|_{L^2}.$$

$\lambda_0 = 2(C_1 + C_2)$ とおくと，$\lambda \geq \lambda_0$ ならば $\lambda - C_1 - C_2 \geq \dfrac{1}{2}\lambda$．よって結論が従う． □

定理 8.2.9 $\kappa > 1$ を定数とし，n 次対称行列に値をとる $\mathbb{R}^n$ 上の一様連続関数 (a_{ij}) が

$$\kappa^{-1}\sum_{j=1}^{n}{\xi_j}^2 \le \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \le \kappa\sum_{j=1}^{n}{\xi_j}^2$$

をみたすとする．$b_1, \ldots, b_n, c \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し，

$$L = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i\partial_j + \sum_{j=1}^{n} b_j\partial_j + c$$

とおくと，定数 $\lambda_0 > 0$, $C > 0$ が存在して，任意の $\lambda \ge \lambda_0$, $u \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ に対し，

$$\lambda\,\|u\|_{L^2} + \lambda^{1/2}\sum_{j=1}^{n}\|\partial_j u\|_{L^2} + \sum_{j,\,k=1}^{n}\|\partial_j\partial_k u\|_{L^2} \le C\,\|Lu - \lambda u\|_{L^2}.$$

よって定数 $C' > 0$ が存在して，

$$\|u\|_{L_2^2} \le C'(\|u\|_{L^2} + \|Lu\|_{L^2}) \quad (u \in C_0^2(\mathbb{R}^n)).$$

証明 概略のみ述べる．まず a_{ij} が定数である場合，座標変換により定理 8.2.8 に帰着される．次に u の台が十分小さい球に含まれる場合，a_{ij} の変化が小さいことを用いて示す．最後に 1 の分割によって一般の場合に拡張する． □

8.2.5 連続性論法

定理 8.2.10（バナッハの固定点定理）$\alpha \in [0, 1)$ とする．完備距離空間 (X, d) と連続写像 $T : X \to X$ が，任意の $x, y \in X$ に対して $d(T(x), T(y)) \le \alpha d(x, y)$ をみたすならば，$T(x^*) = x^*$ となる $x^* \in X$ がただ一つ存在する．

証明 一意性は条件の不等式からただちに従う．

$x_0 \in X$ に対し，$\{T^n(x_0)\}$ がコーシー列であることを示せば，その極限 x^* に対し，$T(x^*) = x^*$ が言える．

$$d(x, y) \le d(x, T(x)) + \alpha d(x, y) + d(T(y), y)$$

より，$(1-\alpha)\,d(x, y) \le d(x, T(x)) + d(T(y), y)$．よって，

$$\begin{aligned}
&(1-\alpha)\,d(T^m(x_0), T^n(x_0)) \\
&\le d(T^m(x_0), T^{m+1}(x_0)) + d(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)) \\
&\le (\alpha^m + \alpha^n)d(x_0, T(x_0)) \to 0 \quad (m, n \to \infty).
\end{aligned}$$

よって $\{T^n(x_0)\}$ はコーシー列である． □

定理 8.2.11 L を定理 8.2.9 と同じ作用素とすると，定数 $\lambda_0 > 0$ が存在して，任意の $\lambda \ge \lambda_0$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対し，$u \in L_2^2(\mathbb{R}^n)$ がただ一つ存在して，$Lu - \lambda u = f$.

証明 一意性は定理 8.2.9 よりただちに従う．

存在を示す．$L_t = (1-t)\Delta + tL - \lambda$ $(t \in [0, 1])$ とおき，方程式 $L_t u = f$ を考える．

$t = 0$ のときは任意の $\lambda > 0$ に対し，定理 8.2.5 より $u \in L^2_2$ の存在が言える．

定理 8.2.9 より，$\lambda_0 > 0$, $C > 0$ が存在して，任意の $\lambda \geq \lambda_0$, $t \in [0, 1]$, $u \in C^2_0$ に対し，$\|u\|_{L^2_2} \leq C\,\|L_t u\|_{L^2}$.

任意の $t \in [0, t_0]$, $f \in L^2$ に対し，$L_t u = f$ の解 $u \in L^2_2$ が存在するとする．$u \in L^2_2$ に対し，方程式

$$L_{t_0} v = f - (t - t_0)(L - \Delta)u$$

の解 $v \in L^2_2$ がただ一つ存在する．そこで $v = Q_t u$ とおく．$u_1, u_2 \in L^2_2$ に対し，

$$\begin{aligned} \|Q_t u_1 - Q_t u_2\|_{L^2_2} &\leq C\|L_{t_0} Q_t u_1 - L_{t_0} Q_t u_2\|_{L^2} \\ &= C\|(t - t_0)(L - \Delta)(u_1 - u_2)\|_{L^2} \\ &\leq C'|t - t_0| \cdot \|u_1 - u_2\|_{L^2_2}. \end{aligned}$$

$C' > 0$ は t_0 によらない定数．よってバナッハの固定点定理 8.2.10 より，$C'|t - t_0| < 1$ となる任意の t に対し，$Q_t u = u$ となる $u \in L^2_2$ の存在が言える．これに対し，$L_{t_0} u = f - (t - t_0)(L - \Delta)u$. よって $L_t u = f$.

C' は t_0 によらないので，任意の $t \in [0, 1]$ に対し $L_t u = f$ の解の存在が言える． □

このような証明の方法は連続性論法とよばれている．

8.2.6 解のなめらかさ

定理 8.2.12 L を定理 8.2.9 と同じ条件をみたす作用素とする．さらに k を自然数とし，L の係数はすべて C^k 級であって C^k ノルムが有界であるとする．このとき，定数 $\lambda_0 > 0$, $C > 0$ が存在して，任意の $\lambda \geq \lambda_0$, $u \in L^2_{k+2}(\mathbb{R}^n)$ に対し，

$$\lambda\|u\|_{L^2_k} + \|u\|_{L^2_{k+2}} \leq C\|Lu - \lambda u\|_{L^2_k}.$$

証明 $u \in C^{k+2}_0$ と多重指数 α, $|\alpha| \leq k$ に対し，

$$\partial^\alpha (L - \lambda)u = (L - \lambda)\partial u + \sum_{|\beta| \leq |\alpha|+1} A_\beta \partial^\beta u.$$

ここで，A_β は有界な関数．

よって定理 8.2.9 より，定数 $\lambda_0 > 0$, $C_1 > 0$ が存在して，任意の $\lambda \geq \lambda_0$

に対し，

$$\begin{aligned}\lambda \|\partial^\alpha u\|_{L^2} + \|\partial^\alpha u\|_{L^2_2} &\le C_1 \|(L-\lambda)\partial^\alpha u\|_{L^2} \\ &\le C_1 \|\partial^\alpha (L-\lambda) u\|_{L^2} + C_1 \sum_{|\beta|\le|\alpha|+1} \|\partial^\beta u\|_{L^2}.\end{aligned}$$

したがって，$j \le k$ に対し，

$$\lambda \|u\|_{L^2_j} + \|u\|_{L^2_{j+2}} \le C_2 \|(L-\lambda)u\|_{L^2_j} + C_2 \|u\|_{L^2_{j+1}}.$$

よって，

$$\begin{aligned}\lambda \|u\|_{L^2_k} + \|u\|_{L^2_{k+2}} &\le C_3 \|(L-\lambda)u\|_{L^2_k} + C_3 \|u\|_{L^2_{k+1}} \\ &\le C_4 \|(L-\lambda)u\|_{L^2_k} + C_4 \|u\|_{L^2_k} \\ &\le C_5 \|(L-\lambda)u\|_{L^2_k} + C_5 \|u\|_{L^2_2} \\ &\le C_6 \|(L-\lambda)u\|_{L^2_k}.\end{aligned}$$

最後の不等号は定理 8.2.9 より． □

定理 8.2.13 L を定理 8.2.9 と同じ条件をみたす作用素とすると，このとき，定数 $\lambda_0 > 0$ が存在して，任意の $\lambda \ge \lambda_0$, $f \in L^2_k(\mathbb{R}^n)$ に対し，$Lu - \lambda u = f$ をみたす $u \in L^2_{k+2}(\mathbb{R}^n)$ がただ一つ存在する．

証明 定理 8.2.7 より，$L = \Delta$ の場合に定理は成立．定理 8.2.12 の不等式より，定理 8.2.11 と同様に連続性論法が適用できる．この場合，$Q_t : L^2_{k+2} \to L^2_{k+2}$ である． □

定理 8.2.14 L を定理 8.2.9 と同じ条件をみたす作用素とすると，定数 $C > 0$ が存在して，$\lambda \ge 0$, $u \in L^2_2(\mathbb{R}^n)$, $Lu - \lambda u \in L^2_k(\mathbb{R}^n)$ ならば，$u \in L^2_{k+2}(\mathbb{R}^n)$ であって，

$$\lambda\|u\|_{L^2_k} + \|u\|_{L^2_{k+2}} \le C(\|Lu - \lambda u\|_{L^2_k} + \|u\|_{L^2}).$$

証明 定理 8.2.12 の λ_0 に対し, $\lambda \ge \lambda_0$ の場合は既に示されている．$0 \le \lambda < \lambda_0$ の場合，

$$\begin{aligned}\lambda\|u\|_{L^2_k} + \|u\|_{L^2_{k+2}} &\le \lambda_0\|u\|_{L^2_k} + \|u\|_{L^2_{k+2}} \\ &\le C(\|Lu - \lambda_0 u\|_{L^2_k}) \\ &\le C(\|Lu - \lambda u\|_{L^2_k} + (\lambda_0 - \lambda)\|u\|_{L^2_k}).\end{aligned}$$

ゆえに，

$$(C+1)\lambda\|u\|_{L^2_k} + \|u\|_{L^2_{k+2}} \le C(\|Lu - \lambda u\|_{L^2_k} + \lambda_0\|u\|_{L^2_k}).$$

右辺第 2 項の k を下げていくには，$j \le k$ に対し，

$$\|u\|_{L^2_j} \le C'(\|Lu - \lambda u\|_{L^2_{j-2}} + \lambda_0 \|u\|_{L^2_{j-2}})$$

を用いればよい. □

8.3 多様体上の楕円型作用素

8.3.1 多様体上の楕円型作用素

リーマン多様体 M 上の複素ベクトル束 E, F に対し, C^∞ 切断全体のなす複素ベクトル空間 $\Gamma(E)$ から $\Gamma(F)$ への k 階以下の微分作用素全体のなす複素ベクトル空間を $\mathcal{D}^k_{E,F}(M)$ とする. このとき, $\mathcal{D}^k_{E,F}(M)/\mathcal{D}^{k-1}_{E,F}(M)$ は, 複素ベクトル束 $\mathrm{Hom}(E, F) \otimes_{\mathbb{R}} S^k(T^*M)$ の切断全体のなす複素ベクトル空間と同一視される. k 階微分作用素 $D \in \mathcal{D}^k_{E,F}(M)$ の射影 $\sigma_k(D)$ を, D の **主表象** という. 点 $p \in M$ に対し, $S^k(T^*_pM)$ の元は, k 次同次多項式で与えられる T_pM 上の関数と見なすことができる. これにより, 接ベクトル束 $\pi : TM \to M$ に対し, $\sigma_k(D)$ は TM 上のベクトル束 $\mathrm{Hom}(\pi^{-1}E, \pi^{-1}F)$ の切断と見なすことができる. これがゼロ切断 $M \subset TM$ の外で $\pi^{-1}E$ から $\pi^{-1}F$ への同型を与えるとき, D は **楕円型** であるという.

コンパクト・リーマン多様体 M 上のエルミート・ベクトル束 E に対し, 切断のソボレフ空間 (L^p_m ノルムによる完備化) $L^p_m\Gamma(M, E)$ やヘルダー空間 $C^{m+h,0}\Gamma(M, E)$ を考えることができる.

コンパクト・リーマン多様体 M 上のエルミート・ベクトル束 E, F と 2 階楕円型微分作用素 $D \in \mathcal{D}^2_{E,F}(M)$ を考える.

$k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ とする. 定理 8.2.14 より, 次のアプリオリ評価が従う.

定理 8.3.1 定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $s \in L^2_{k+2}\Gamma(M, E)$ に対し,

$$\|s\|_{L^2_{k+2}} \le C(\|s\|_{L^2} + \|Ds\|_{L^2_k}).$$

定理 8.3.2 $L^2\mathrm{Ker}(D) = \mathrm{Ker}(D)$.

証明 アプリオリ評価 8.3.1 より, $L^2\mathrm{Ker}(D) = L^2_k\mathrm{Ker}(D)$. よってソボレフの埋めこみ定理 7.3.30 より, 結論が従う. □

定理 8.3.3 $\mathrm{Ker}(D)$ は有限次元ベクトル空間である.

証明 アプリオリ評価 8.3.1 とレリッヒ＝コンドラショフの定理 7.3.32, および定理 8.3.2 より, $\mathrm{Ker}(D)$ の中の L^2 有界列は収束する部分列をもつ. よって定理 6.2.2 より, $\mathrm{Ker}(D)$ は有限次元. □

D の随伴作用素 D^* も 2 階楕円型で, $\mathrm{Ker}(D^*) \cong \mathrm{Coker}(D)$. よって次が従う.

定理 8.3.4 $\mathrm{Ker}(D), \mathrm{Coker}(D)$ は有限次元ベクトル空間である. すなわち D

はフレドホルム作用素である．

8.3.2 調和形式

リーマン多様体 (M, g) 上のドラーム複体 $(\Omega^\bullet, \mathrm{d})$ に対し，外微分作用素 d の形式的随伴 $\mathrm{d}^* : \Omega^{q+1} \to \Omega^q$ を $\mathrm{d}^* = -(-1)^q *^{-1} \mathrm{d} *$ で定義する．このとき $\mathrm{d}^*\mathrm{d}^* = 0$ である．また，$\alpha \in \Omega^q$, $\beta \in \Omega^{q+1}$ に対し，

$$\begin{aligned}(\alpha, \mathrm{d}^*\beta)\,\omega_g &= -(-1)^q \alpha \wedge (\mathrm{d} * \beta) = (\mathrm{d}\alpha) \wedge *\beta - \mathrm{d}(\alpha \wedge *\beta) \\ &= (\mathrm{d}\alpha, \beta)\,\omega_g - \mathrm{d}(\alpha \wedge *\beta).\end{aligned}$$

よって M がコンパクトの場合，$\langle \mathrm{d}\alpha, \beta\rangle_g = \langle \alpha, \mathrm{d}^*\beta\rangle_g$.

2 階微分作用素 $\Delta = \mathrm{d}^*\mathrm{d} + \mathrm{d}\mathrm{d}^* = (\mathrm{d} + \mathrm{d}^*)^2 : \Omega^q \to \Omega^q$ をリーマン多様体の **ラプラシアン** という．特に $q = 0$ の場合，$\Delta = \mathrm{d}^*\mathrm{d}$ である．

点 $p \in M$ のまわりの局所座標系 $(U; x^1, \ldots, x^m)$ を，$g_p = \sum_{i=1}^m \mathrm{d}x^i \cdot \mathrm{d}x^i$ となるように取ると，

$$I = \{i(1), \ldots, i(q)\} \subset \{1, \ldots, m\}, \quad i(1) < \cdots < i(q),$$

$$\alpha = f\,\mathrm{d}x^I = f\,\mathrm{d}x^{i(1)} \cdots \mathrm{d}x^{i(q)} \in \Omega^q(U), \quad f \in C^\infty(U)$$

に対し，

$$\mathrm{d}\alpha = \sum_{i \notin I} (\partial_i f)\,\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^I, \quad (\mathrm{d}^*\alpha)_p = \sum_{a=1}^{q} (-1)^a (\partial_{i(a)} f)(p)\,\mathrm{d}x^{I \setminus \{i(a)\}}$$

と書ける．よって p において Δ の 2 階の項は $-\sum_{i=1}^m (\partial_i)^2$ となる．（古典的な記号とは符号が逆になるが，慣習なのでしかたがない．）したがって Δ は楕円型である．

$$\mathbb{H}^q_\Delta = \mathbb{H}^q_\Delta(M) = \mathrm{Ker}(\Delta : \Omega^q \to \Omega^q)$$

とおき，その元を **調和形式** という．

ラプラシアンは $\Delta\mathrm{d} = \mathrm{d}\Delta$, $\mathrm{d}^*\Delta = \Delta\mathrm{d}^*$ をみたし，

$$\begin{aligned}(\Delta\alpha, \beta)\,\omega_g &= (\beta, \mathrm{d}^*\mathrm{d}\alpha)\,\omega_g + (\mathrm{d}\mathrm{d}^*\alpha, \beta)\,\omega_g \\ &= (\mathrm{d}\alpha, \mathrm{d}\beta)\,\omega_g + (\mathrm{d}^*\alpha, \mathrm{d}^*\beta)\,\omega_g - \mathrm{d}(\beta \wedge *\mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}^*\alpha \wedge *\beta) \\ &= (\alpha, \Delta\beta)\,\omega_g + \mathrm{d}\gamma, \\ \gamma &= \alpha \wedge *\mathrm{d}\beta - \beta \wedge *\mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}^*\alpha \wedge *\beta - \mathrm{d}^*\beta \wedge *\alpha.\end{aligned}$$

よって次が成立する．

定理 8.3.5 コンパクト有向リーマン多様体 M に対し，

$$\langle \Delta\alpha, \alpha'\rangle_g = \langle \alpha, \Delta\alpha'\rangle_g, \quad \mathrm{Ker}(\Delta) = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{d}^*).$$

(M, g) をコンパクト有向 m 次元リーマン多様体とすると，次が成立する．

定理 8.3.6 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする．定数 $C > 0$ が存在して，任意の $\alpha \in L^2_{k+2}\Omega^q(M)$ に対し，

$$\|\alpha\|_{L^2_{k+2}} \leq C(\|\alpha\|_{L^2} + \|\Delta\alpha\|_{L^2_k}).$$

定理 8.3.7 $L^2\mathbb{H}^q_\Delta(M) = \mathbb{H}^q_\Delta(M)$.

定理 8.3.8 コンパクト有向リーマン多様体 (M, g) に対し，$\mathbb{H}^q_\Delta(M)$ は有限次元ベクトル空間である．

$\alpha \in \Omega^q(M), \varphi \in \mathbb{H}^q(M)$ に対し，$\langle \Delta\alpha, \varphi\rangle_g = \langle \alpha, \Delta\varphi\rangle_g = 0$ である．逆に次がなりたつ．

定理 8.3.9 $\beta \in \Omega^q(M), \beta \perp \mathbb{H}^q(M)$ ならば，$\beta \in \Delta(\Omega^q(M))$.

以下，この定理の証明を述べる．

定理 8.3.10 (1) 定数 $C > 0$ が存在して，任意の $\beta \in L^2_2\Omega^q(M), \beta \perp \mathbb{H}^q(M)$ に対し，$\|\beta\|_{L^2} \leq C\,\|\Delta\beta\|_{L^2}$.
(2) $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする．定数 $C > 0$ が存在して，任意の $\beta \in L^2_{k+2}\Omega^q(M)$, $\beta \perp \mathbb{H}^q(M)$ に対し，$\|\beta\|_{L^2_{k+2}} \leq C\,\|\Delta\beta\|_{L^2_k}$.

証明 (1) もしそのような C が存在しないならば，列 $\{\beta_n \in L^2\Omega^q\}, \beta_n \perp \mathbb{H}^q$ が存在して，$\|\beta_n\|_{L^2} = 1, \|\Delta\beta_n\|_{L^2} \to 0$. アプリオリ評価 8.3.6 より，$\{\beta_n\}$ は L^2_2 有界，よってレリッヒ=コンドラショフの定理 7.3.32 より，$\{\beta_n\}$ は L^2 で $\beta \in L^2\Omega^q$ に収束する部分列をもつ．アプリオリ評価より，この収束は L^2_2 収束である．よって，$\beta \perp \mathbb{H}^q, \Delta\beta = 0, \|\beta\|_{L^2} = 1$. これは矛盾である．
(2) は (1) とアプリオリ評価から従う． □

定理 7.3.10, 7.3.30 より，定理 8.3.9 は次から従う．

定理 8.3.11 $\beta \in L^2_k\Omega^q(M), \beta \perp \mathbb{H}^q(M)$ ならば，$\beta \in \Delta(L^2_{k+2}\Omega^q(M))$.

証明 線型汎関数 $l : \Delta\Omega^q \to \mathbb{R}$ を $l(\Delta\gamma) = \langle\beta, \gamma\rangle_g$ によって定めると，定理 8.3.10 (1) より，

$$|\,l(\Delta\gamma)| \leq \|\beta\|_{L^2}\,\|\gamma\|_{L^2} \leq C\,\|\beta\|_{L^2}\,\|\Delta\gamma\|_{L^2}$$

よってハーン=バナッハの定理 6.3.2 とリースの表現定理 6.4.28 より，$\alpha \in L^2\Omega^q$ が存在して，任意の $\gamma \in \Omega^q$ に対し，$\langle\alpha, \Delta\gamma\rangle_g = \langle\beta, \gamma\rangle_g$. よって弱微分の意味で $\Delta\alpha = \beta \in L^2_k\Omega^q$. よってアプリオリ評価 8.3.6 より，$\alpha \in L^2_{k+2}\Omega^q$. □

定理 8.3.9, 8.3.5 より次が従う．

定理 8.3.12 (ホッジ＝ドラームの定理) コンパクト有向リーマン多様体 (M,g) に対し，内積 $\langle\ ,\ \rangle_g$ に関する直和分解

$$\begin{aligned}\Omega^q(M) &= \Delta(\Omega^q(M)) \oplus \mathbb{H}^q_\Delta(M)\\ &= \mathrm{dd}^*\Omega^q(M) \oplus \mathrm{d}^*\mathrm{d}\Omega^q(M) \oplus \mathbb{H}^q_\Delta(M)\\ &= \mathrm{d}\Omega^{q-1}(M) \oplus \mathrm{d}^*\Omega^{q+1}(M) \oplus \mathbb{H}^q_\Delta(M)\end{aligned}$$

が成立し，$\mathrm{Ker}(\Delta) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{d})$ の誘導する写像 $\mathbb{H}^q_\Delta(M) \to \mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(M)$ はベクトル空間の同型である．

系 8.3.1 コンパクト有向多様体 M に対し，$\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(M)$ は有限次元である．

定理 8.3.12, 8.3.10 (2), 7.3.32 より，次が従う．

定理 8.3.13 コンパクト有向リーマン多様体 (M, g) に対し，Δ は $\Delta\Omega^q(M)$ から $\Delta\Omega^q(M)$ への同型を与え，逆写像 G は L^2 ノルムに関するコンパクト作用素である．

作用素 G を Δ の **グリーン作用素** という．

8.4 リーマン多様体上の熱核

8.4.1 リーマン多様体上の熱核

n 次元リーマン多様体 (M, g) 上のエルミート・ベクトル束 E とその接続 ∇ に対し，E の切断に作用するラプラシアンを定義したい．項に 2 度出てくる添字に関して和を取るという記法（アインシュタインの規約）を用いて計算してみよう．TM の直交枠 (e_j) に対し，作用素 $\nabla_{e_j}\nabla_{e_j}$ は直交枠の取り方に依存する．直交枠 (e_j), $(\hat{e}_i)$ に対し，$\hat{e}_i = a_{ij}e_j$, $e_j = a_{ij}\hat{e}_i$ とする．レビチビタ接続も ∇ で表すと，

$$\nabla_{\hat{e}_i}\nabla_{\hat{e}_i} - \nabla_{e_j}\nabla_{e_j} = \nabla_{\hat{e}_i} \circ a_{ij}\nabla_{e_j} - a_{ij}\nabla_{\hat{e}_i}\nabla_{e_j} = (\nabla_{\hat{e}_i}a_{ij})\nabla_{e_j} = \nabla_X,$$

$$X = (\nabla_{\hat{e}_i}a_{ij})e_j = \nabla_{\hat{e}_i}(a_{ij}e_j) - a_{ij}\nabla_{\hat{e}_i}e_j = \nabla_{\hat{e}_i}\hat{e}_i - \nabla_{e_j}e_j.$$

したがって $\Delta^E = -\nabla_{e_j}\nabla_{e_j} + \nabla_Y$ $(Y = \nabla_{e_j}e_j)$ とおくと（符号に注意），これは直交枠の取り方によらない．この作用素を E 係数のラプラシアンとよぶ．これは 2 階楕円型作用素である．

(M, g) をコンパクト有向リーマン多様体とする．Ψ を M 上の自明実直線束で，$\Psi \otimes \Psi$ と M の密度束 $|\Lambda|$ の間の同型が与えられているものとする．

定義 8.4.1 $E\otimes\Psi$ 係数のラプラシアン $\Delta = \Delta^{E\otimes\Psi}$ の **熱核** とは，$\mathbb{R}_{>0}\times M\times M$ 上のベクトル束 $(E\otimes\Psi)\boxtimes(E^*\otimes\Psi)$ の C^1 級かつ $x, y \in M$ について C^2 級である切断 $p_t(x, y) = \langle x|\mathrm{e}^{-t\Delta}|y\rangle$ であって，次の条件をみたすもののことで

ある．

(1) $(\partial_t + \Delta_x)\, p_t(x,\, y) = 0$.

(2) 任意の $\sigma \in \Gamma(M,\, E \otimes \Psi)$ に対し，$\displaystyle\lim_{t\to+0}\int_M p_t(x,\, y)\,\sigma(y) = \sigma(x)$.

（Ψ でひねっているので体積要素 $\mathrm{d}\mu_g$ が表に現れない．）

8.4.2 主束の熱核

エルミート・ベクトル束 E が，コンパクト・リー群 $G \subset \mathrm{SO}(N)$ に対する G 主束 $\pi: P \to M$ から，G の複素表現 $\rho: G \to \mathrm{GL}(V)$ に付随して得られるとする．このとき $\Gamma(M,\, E)$ は $C^\infty(P) \otimes V$ の G 不変部分空間 $(C^\infty(P) \otimes V)^G$ と同一視される．G のリー環 $\mathfrak{g}$ の不変内積として $\mathfrak{so}(N)$ から誘導されるものを取り，これによって G のリーマン計量を定める．(E_a) を $\mathfrak{g}$ の正規直交基底とするとき，G のラプラシアンは $-\sum_a {E_a}^2$ である．$C = \sum_a \rho(E_a)^2$ を **カシミール作用素** という．これは正規直交基底の取り方によらない．P 上のリーマン計量 g_P を 5.3.10 節のように定め，これに関するラプラシアンを Δ^P とすると，TM の局所的直交枠 (e_i) に対し，

$$\Delta^P = -\sum_i \left({e_i}^{\mathrm{h}}{e_i}^{\mathrm{h}} - (\nabla_{e_i} e_i)^{\mathrm{h}}\right) - \sum_a {E_a}^2.$$

よって次が言える．

定理 8.4.1 $\Delta^E = \Delta^P + C \mid (C^\infty(P) \otimes V)^G$.

よって G のリーマン計量の定める体積要素を $\mathrm{d}\mu_G$ とすると，次が従う．

定理 8.4.2 $p_1, p_2 \in P$ に対し，

$$\langle p_1 \mid \mathrm{e}^{-t\Delta^E} \mid p_2 \rangle = \int_{g\in G} \langle p_1 \mid \mathrm{e}^{-t(\Delta^E + C)} \mid p_2 g \rangle\, \mathrm{d}\mu_G.$$

5.3.10 節の記号を用いて，次が言える．

定理 8.4.3 $\langle p \mid \mathrm{e}^{-t\Delta^E} \mid p \rangle$ $(t \to +0)$ の漸近展開は，$\Phi_i \in C^\infty(P \times \mathfrak{g})$ $(i \geq 0)$ が存在して，次の『漸近展開として定義される積分』に一致する．

$$(4\pi i)^{-(\dim P)/2} \int_{X\in\mathfrak{g}} \sum_{i=0}^{\infty} t^i\, \Phi_i(p,\, X)\, \mathrm{e}^{-\|X\|^2/4t}\, \rho(\exp(-X))\, \det(J_X^{\mathfrak{g}})\, \mathrm{d}\mu_{\mathfrak{g}}.$$

ここで，$\Phi_0(p,\, X) = \left(\det(J_X^{\mathfrak{g}})\, \det(J_X^M)\right)^{-1/2}$.

第 9 章
モース理論と超対称性

「先生，ついにモース理論がわかりました！」

若き物理学者の甲高い声を聞きながら，かつて同じことばを自分に告げた若者がいたことを彼は思い出していた．高次元ポアンカレ予想解決に匹敵する，否，それをも凌ぐ大きな波が近づいている予感を彼は感じた．

「不滅…！　モース理論は…！　不滅…！」

彼はそう呟いた．

9.1 スメールのモース理論

9.1.1 境界つき多様体

$\mathbb{R}^n$ の点 $(x^1, \ldots, x^n)$ で $x^n \geq 0$ であるもの全体の集合を H，$x^n > 0$ であるもの全体の集合を H°，$x^n = 0$ であるもの全体の集合を ∂H とし，H を上半空間，H° を内部，∂H を境界という．H の開集合 U, V に対し，連続写像 $f: U \to V$ が C^∞ 写像であるとは，$f(U \cap H^\circ) \subset H^\circ$, $f(U \cap \partial H) \subset \partial H$ であって，$f|U \cap H^\circ$, $f|U \cap \partial H$ が C^∞ 写像であり，$f|U \cap H^\circ$ の任意の高階導関数が U に連続に拡張でき，そのうち ∂_n を含まないものの $U \cap \partial H$ への拡張が，$f|U \cap \partial H$ の対応する高階導関数に一致することである．

H の開集合 U, V に対し，C^∞ 写像 $f: U \to V$ が微分同相であるとは，逆写像が存在して C^∞ であり，かつ $f(U \cap \partial H) = V \cap \partial H$ であることである．

ハウスドルフ空間 M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$，および U_α から H の開集合の上への同相 φ_α が与えられていて，$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ が微分同相であるとき，$(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda})$ を **境界つき多様体** といい，$\partial M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \varphi_\alpha^{-1}(\partial H)$ を M の **境界** という．

9.1.2 モース関数

多様体 M 上の C^∞ 関数 $f: M \to \mathbb{R}$ に対し，$(\mathrm{d}f)_p = 0$ となる点 $p \in M$ を f の **臨界点** といい，臨界点全体の集合を M^f と書く．臨界点 p における双線型形式

$$H(f)_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}, \quad H(f)_p(\xi_p, \eta_p) = \xi_p(\eta f) = \eta_p(\xi f)$$

を **ヘッシアン** という．ξ, η は接ベクトル ξ_p, η_p を p の近傍上のベクトル場に拡張したものとする．ヘッシアンは対称双線型形式である．ヘッシアンの指数，すなわち対称行列で表したときの負の固有値に対する固有空間の次元の和を，臨界点 p の **モース指数** といい，μ_p と書く．モース指数が μ である臨界点全体の集合を $M^f(\mu)$ とする．

すべての臨界点においてヘッシアンが非退化であり，プロパーすなわちコンパクト集合の逆像がコンパクトであるとき，f を **モース関数** とよぶ．このとき臨界点は孤立している．

臨界点の像に含まれない実数 c を，f の **正則値** という．このとき，$f^{-1}(c)$ は超曲面，すなわち M の余次元 1 の部分多様体である．

補題 9.1.1（モースの補題）n 次元多様体 M 上のモース関数 f のモース指数 μ の臨界点 p に対し，p の開近傍 U と局所座標系 $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, $\varphi(p) = \mathbf{0}$ が存在して，

$$f(q) = -x^1(q)^2 - \cdots - x^\mu(q)^2 + x^{\mu+1}(q)^2 + \cdots + x^n(q)^2 \quad (q \in U)$$

と書ける．

m 次元球を B^m と書く．

モース関数 $f: M \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ に対し，$M_c = f^{-1}((-\infty, c])$ とおく．$\partial M_c = f^{-1}(c)$ である．

f の 2 つの正則値 $c < c'$ に対し，$f^{-1}([c, c'])$ がただ一つの臨界点を含み，そのモース指数が μ であるとする．このとき，埋め込み $i: \partial B^\mu \times B^{n-\mu} \to \partial M_c$ が存在して，i による貼りあわせ $M_c \cup (B^\mu \times B^{n-\mu})$ の角を解消したものが $M_{c'}$ に微分同相である．

$B^\mu \times B^{n-\mu}$ を k ハンドルという．閉多様体 M 上のモース関数は，M のハンドルへの分解を与える．

9.1.3 勾配流と安定／不安定多様体

リーマン多様体 (M, g) 上のモース関数 $f: M \to \mathbb{R}$ に対し，$g(\xi, -) = -\mathrm{d}f$ によって定義されるベクトル場 ∇f を **勾配ベクトル場** といい，∇f の流れ

$$\gamma_t : M \to M \ (t \in \mathbb{R}), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_t = (\nabla f)_{\gamma_t}$$

を **勾配流** という．勾配流によって動く点 $\gamma_t(x)$ $(x \in M)$ は，$t \ll 0$ で臨界点 $\lim_{t\to-\infty}\gamma_t(x)$ の近く，$t \gg 0$ で臨界点 $\lim_{t\to\infty}\gamma_t(x)$ の近くにいてまったりしているが，途中で一瞬のうちに 2 つの臨界点の間を飛んでいく．そこで勾配流のことを **インスタントン**（瞬間子）ともよぶ．

n 次元コンパクト・リーマン有向多様体 (M, g) 上のモース関数 f の臨界点 p に対し，

$$W^{\mathrm{s}}(p) = \{x \in M \mid \lim_{t\to\infty}\gamma_t(x) = p\},$$
$$W^{\mathrm{u}}(p) = \{x \in M \mid \lim_{t\to-\infty}\gamma_t(x) = p\}$$

をそれぞれ **安定多様体・不安定多様体** という．p のモース指数を μ_p とすると，安定多様体 $W^{\mathrm{s}}(p)$ は M に埋めこまれた $n-\mu_p$ 次元開円板，不安定多様体 $W^{\mathrm{u}}(p)$ は M に埋めこまれた μ_p 次元開円板である．

任意の臨界点 p, q に対して $W^{\mathrm{s}}(p), W^{\mathrm{u}}(q)$ が横断的であるとき，モース関数 f を **モース＝スメール関数** とよぶ．このとき $W(p, q) = W^{\mathrm{u}}(p) \cap W^{\mathrm{s}}(q)$ とおくと，これは $\mu_p - \mu_q$ 次元部分多様体である．勾配流により群 $\mathbb{R}$ が $W(p, q)$ に作用する．商空間 $\mathcal{M}(p, q) = W(p, q)/\mathbb{R}$ を勾配流の **モジュライ空間** とよぶことにする．

9.1.4 モース＝スメール複体

モース＝スメール関数 f の臨界点 p に対し，不安定多様体 $W^{\mathrm{u}}(p)$ の向き（基底の同値類）$o^{\mathrm{u}}(p)$ と安定多様体の法ベクトル束の向き $o^{\mathrm{s},\perp}(p)$ を固定する．このとき $W(p, q)$ の向き $o(p, q)$ を，基底をならべたもの $(o(p, q), o^{\mathrm{s},\perp}(q))$ の向きが $o^{\mathrm{u}}(p)$ に一致するように定める．

$\mu_p - \mu_q = 1$ のとき，モジュライ空間 $\mathcal{M}(p, q) = W(p, q)/\mathbb{R}$ は有限集合，$W(p, q)$ は有限個の開区間に同相である．$\mathcal{M}(p, q)$ の各点に符号をつける．すなわち，$[x] \in \mathcal{M}(p, q)$ に対し，勾配流の定める写像 $\mathbb{R} \to W(p, q)$, $t \mapsto \gamma_t(x)$ が向きを保つときは $+1$，逆にするときは -1 とする．これらの符号の和を $[\mathcal{M}(p, q)] \in \mathbb{Z}$ と書くことにする．

モース指数 μ のすべての臨界点の生成する自由アーベル群を $C^\mu(f)$ と書き，準同型 $\delta : C^\mu(f) \to C^{\mu+1}(f)$ を

$$\delta(q) = \sum_{p \in M^f(\mu+1)} [\mathcal{M}(p, q)]\, p$$

で定義する．このとき次がなりたつ．

定理 9.1.1 $\delta\delta = 0$.

こうして得られた複体 $(C^\bullet(f), \delta)$ を **モース＝スメール複体** とよぶ．

以下，この定理の証明のアイディアを述べる．

$\mu_p - \mu_q = 2$ のとき，モジュライ空間 $\mathcal{M}(p, q)$ は 1 次元多様体である．これを連結成分ごとにコンパクト化するとき，その境界を $\partial\mathcal{M}(p, q)$ とする．

このとき，$\partial\mathcal{M}(p, q)$ と $\displaystyle\bigsqcup_{\mu_r=\mu_q+1} \mathcal{M}(p, r) \times \mathcal{M}(r, q)$ の間の 1 対 1 対応があることと，コンパクト 1 次元境界つき多様体の境界が偶数個の点であることから定理が従う．この 1 対 1 対応の存在の証明には，次の 2 つの定理を用いる．

定理 9.1.2 $p, q \in M^f, \mu_p - \mu_q = 2$ とする．任意の列 $[x_n] \in \mathcal{M}(p, q)$ に対し，それが収束する部分列をもたないならば，部分列 $[x_{n(k)}]$ と数列 $t^-(k) \to -\infty$, $t^+(k) \to \infty$ が存在して，

$$x^{\pm} = \lim_{k\to\infty} \gamma_{t^{\pm}(k)}(x_{n(k)}) \notin M^f,$$

$$\lim_{t\to-\infty} \gamma_t(x^-) = p, \quad \lim_{t\to\infty} \gamma_t(x^-) = \lim_{t\to-\infty} \gamma_t(x^+), \quad \lim_{t\to\infty} \gamma_t(x^+) = q.$$

定理 9.1.3 $p, q, r \in M^f$, $\mu_p - \mu_r = \mu_r - \mu_q = 1$ とする．任意の $[x^-] \in M(p, r)$, $[x^+] \in M(r, q)$ に対し，列 $[x_n] \in M(p, q)$ と数列 $t^-(n) \to -\infty$, $t^+(n) \to \infty$ が存在して，$x^{\pm} = \lim_{n\to\infty} \gamma_{t^{\pm}(n)}(x_n)$.

モース＝スメール複体のコホモロジーについて，次が成立する．

定理 9.1.4 $(C^{\bullet}(f) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \delta)$ のコホモロジーは，M のドラーム・コホモロジーに同型である．

すなわち，ドラーム・コホモロジーという多様体の大域的形状に関する非自明な情報が，モース＝スメール関数の臨界点に局在化し，勾配流（またの名をインスタントン）のモジュライ空間に集約されるのである．

9.2 フレアのモース理論

9.2.1 チャーン＝サイモンズ 3 形式

コンパクト・リー群 G とそのリー代数 $\mathfrak{g} \subset M_k(\mathbb{C})$，および 3 次元コンパクト有向リーマン多様体 (Y, g) に対し，主束 $Y \times G$ 上の接続全体の集合を $\mathcal{A} = \Omega^1(Y) \otimes \mathfrak{g}$，ゲージ変換全体のなす群を $\mathcal{G}$ とし，そのうち $u = \exp(\xi)$, $\xi \in C^\infty(Y) \otimes \mathfrak{g}$ と書けるもの全体のなす部分群を $\mathcal{G}_0$ とする．自然な写像 $\mathcal{A}/\mathcal{G}_0 \to \mathcal{A}/\mathcal{G}$ は $\mathbb{Z}$ 被覆である．

$A \in \mathcal{A}$ に対し，

$$\mathrm{CS}_3(A) = \mathrm{tr}\left[A \wedge F_A - \frac{1}{3} A \wedge A \wedge A\right] = \mathrm{tr}\left[A \wedge \mathrm{d}A + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A\right]$$

を 3 次 **チャーン＝サイモンズ形式** という．$u \in \mathcal{G}$ に対し，$u^*A = u^{-1}\mathrm{d}u + u^{-1}Au$, $F_{u^*A} = u^{-1}F_A u$ より，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{CS}_3(u^*A) - \mathrm{CS}_3(A) \\
&= \mathrm{tr}\left[(\mathrm{d}u)u^{-1}F_A - \frac{1}{3}((\mathrm{d}u)u^{-1})^3 - ((\mathrm{d}u)u^{-1})^2 A - (\mathrm{d}u)u^{-1}A^2\right] \\
&= -\mathrm{d}\,\mathrm{tr}\left[(\mathrm{d}u)u^{-1}A\right] - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\left[((\mathrm{d}u)u^{-1})^3\right].
\end{aligned}
$$

$u = \exp(\xi) \in \mathcal{G}_0$, $\xi \in C^\infty(Y) \otimes \mathfrak{g}$ のときは，$\mathrm{tr}\left[((\mathrm{d}u)u^{-1})^3\right] = \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\,[\xi \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\xi]$.

$a \in \Omega^1(Y) \otimes \mathfrak{g}$ に対し，$\mathrm{CS}_3(A+a)$ の a について 1 次の項は，

$$
\mathrm{tr}(a \wedge \mathrm{d}A + A \wedge \mathrm{d}a + 2a \wedge A \wedge A) = 2\,\mathrm{tr}(a \wedge F_A) - \mathrm{d}\,\mathrm{tr}(A \wedge a).
$$

9.2.2 フレア・ホモロジー

主束 $Y \times G$ 上の接続 $A \in \mathcal{A}$ に対し，$h(A) = i\int_Y \mathrm{CS}_3(A)$ は $\mathcal{A}/\mathcal{G}_0$ 上の実数値関数を定める．臨界点は $F_A = 0$ をみたす A，すなわち平坦な接続である．h をモース関数のように用いて無限次元空間 $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ に対するホモロジーを考えるのが，フレア・ホモロジーの理論である．L^2 内積によって $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上にリーマン計量に相当するものを与える．このとき，勾配流は $Y \times \mathbb{R} \times G$ 上の ASD 接続に対応する．

9.3 超対称量子力学

9.3.1 ボソンとフェルミオン

場の量子論は粒子の生成・消滅を基本概念とする．その定式化は次の定理にもとづく．

定理 9.3.1 エルミート内積空間 V と作用素 $a : V \to V$ が

$$
[a^\dagger a,\, a] = -a, \quad [a^\dagger a,\, a^\dagger] = a^\dagger
$$

をみたすとする．ただし $[A,\, B] = AB - BA$．このとき，

(1) $a^\dagger a u = \lambda u$ ($\lambda \in \mathbb{C}$, $u \in V$) ならば

$$
a^\dagger a(au) = (\lambda - 1)au, \quad a^\dagger a(a^\dagger u) = (\lambda + 1)a^\dagger u.
$$

(2) $a^\dagger a$ の固有値は非負整数.

このとき，a を消滅作用素，$a^\dagger$ を生成作用素，$a^\dagger a$ を個数作用素という．0 でないベクトル $|0\rangle \in V$ で $a|0\rangle = 0$ をみたすものを **真空** という．

定理 9.3.2 (1) エルミート内積空間 V と作用素 $a : V \to V$ に対し，

$$
[a,\, a^\dagger] = 1
$$

とする．このとき $[a^\dagger a,\, a] = -a$, $[a^\dagger a,\, a^\dagger] = a^\dagger$ である．

真空 $|0\rangle \in V$ に対し，$(a^\dagger)^n|0\rangle$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) は 1 次独立である．これらが V を張っているとき，$a(V) \subset V$, $a^\dagger(V) \subset V$ である．V をボ

ソンのフォック空間という．

(2) エルミート内積空間 W と作用素 $\psi : W \to W$ に対し，

$$\{\psi,\, \psi^\dagger\} = 1, \quad \{\psi,\, \psi\} = \{\psi^\dagger,\, \psi^\dagger\} = 0 \quad (\{A,\, B\} = AB + BA)$$

とする．このとき $[\psi^\dagger\psi,\, \psi] = -\psi$, $[\psi^\dagger\psi,\, \psi^\dagger] = \psi^\dagger$ である．

真空 $|0\rangle \in W$ に対し，$|0\rangle$, $\psi^\dagger|0\rangle$ は 1 次独立である．これらが W を張るとき，$\psi(W) \subset W$, $\psi^\dagger(W) \subset W$ である．W をフェルミオンのフォック空間という．

物理学ではボソンは力に，フェルミオンは物質に対応している．

9.3.2 ボソンの実現

ボソンの状態は，エルミート多項式 $H_n(x)$ によって記述される．

$e^{-x^2/2}x^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ の張る複素ベクトル空間を $\Omega^0 = \mathbb{C}[x]\, e^{-x^2/2}$ とし，エルミート内積を

$$\langle f,\, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx \quad (f,\, g \in \Omega^0)$$

で定義する．このとき $\left\langle \dfrac{df}{dx},\, g \right\rangle = -\left\langle f,\, \dfrac{dg}{dx} \right\rangle$.

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-x^2/2} \circ \frac{d}{dx} \circ e^{x^2/2} : \Omega^0 \to \Omega^0$$

とすると，そのエルミート共役は

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dx} + x\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{x^2/2} \circ \frac{d}{dx} \circ e^{-x^2/2}.$$

ゆえに

$$[a,\, a^\dagger] = 1, \quad a^\dagger a = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right) - \frac{1}{2}, \quad a(e^{-x^2/2}H_0(x)) = 0.$$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{\partial}{\partial x} + x\right) e^{-x^2/2}e^{2ux-u^2} &= (2x - 2u)\, e^{-x^2/2}e^{2ux-u^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial u}\, e^{-x^2/2}e^{2ux-u^2}\end{aligned}$$

より，$\left(-\dfrac{d}{dx} + x\right) e^{-x^2/2}H_n(x) = e^{-x^2/2}H_{n+1}(x)$．よって Ω^0 はボソンのフォック空間である．

微分形式 $e^{-x^2/2}x^n dx$ $(n \geq 0)$ の張る複素ベクトル空間を Ω^1 とし，エルミート内積を

$$\langle g\, dx,\, h\, dx\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} h(x)\, dx$$

で定義する．

フェルミオンのフォック空間 W に対し，$|0\rangle = 1$, $\psi^\dagger|0\rangle = \mathrm{d}x$ あるいは $|0\rangle = \mathrm{d}x$, $\psi^\dagger|0\rangle = 1$ によって $W = \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\,\mathrm{d}x$ と見なすと，$\Omega^0\otimes W = \Omega^0\oplus\Omega^1$ であり，この上に作用素 a, $a^\dagger$, ψ, $\psi^\dagger$ が誘導される．

9.3.3 超対称性

エルミート空間 V に対し，$a, a^\dagger : V \to V$ と $\psi, \psi^\dagger : V \to V$ はたがいに可換であるとし，

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad \{\psi, \psi^\dagger\} = 1, \quad \{\psi, \psi\} = \{\psi^\dagger, \psi^\dagger\} = 0$$

とする．$H = a^\dagger a + \psi^\dagger\psi$, $Q = a^\dagger\psi + \psi^\dagger a$ とおくと，

$$[Q, a] = -\psi, \quad \{Q, \psi\} = a, \quad [Q, a^\dagger] = \psi^\dagger, \quad \{Q, \psi^\dagger\} = a^\dagger,$$
$$Q^2 = H.$$

Q を超対称変換という．

作用素 $H = Q^2 : V \to V$ の核を $V[0]$ とし，Q の $V[0]$ への制限を $Q[0] : V[0] \to V[0]$ とすると，$Q[0]^2 = 0$．そこでコホモロジー $\mathrm{Ker}\,Q[0]/\mathrm{Im}\,Q[0]$ を考えることができる．

9.3.4 超対称性とドラーム複体

外微分作用素 $\mathrm{d} : \Omega^0 \to \Omega^1$ を Ω^1 上 0 として $\mathrm{d} : \Omega^0\oplus\Omega^1 \to \Omega^0\oplus\Omega^1$ に拡張する．$\mathrm{d}^* : \Omega^1 \to \Omega^0$ を $\mathrm{d}^*(g\,\mathrm{d}x) = -\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ で定義し，これを Ω^0 上 0 として $\mathrm{d}^* : \Omega^0\oplus\Omega^1 \to \Omega^0\oplus\Omega^1$ に拡張すると，$\langle \mathrm{d}\alpha, \beta\rangle = \langle\alpha, \mathrm{d}^*\beta\rangle$．すなわち d^* は d のエルミート共役である．

さらに $f \in \mathbb{C}[x]$, $\mathrm{d}_f = \mathrm{e}^{-f}\circ\mathrm{d}\circ\mathrm{e}^f$, $\mathrm{d}_f^* = \mathrm{e}^f\circ\mathrm{d}^*\circ\mathrm{e}^{-f}$ とおくと，

$$\langle \mathrm{d}_f\alpha, \beta\rangle = \langle\alpha, \mathrm{d}_f^*\beta\rangle.$$

このとき，$f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ ならば，

$$\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}_f = \mathbb{C}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}, \quad \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}_f^* = 0.$$

そこで $W = \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\,\mathrm{d}x$, $|0\rangle = 1$, $\psi^\dagger|0\rangle = \mathrm{d}x$ とすると，

$$Q = a^\dagger\psi + \psi^\dagger a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{d}_f + \mathrm{d}_f^*).$$

また，$f(x) = -\dfrac{x^2}{2}$ ならば，

$$\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}_f = 0, \quad \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}_f^* = \mathbb{C}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

そこで $W = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\,\mathrm{d}x,\ |0\rangle = \mathrm{d}x,\ \psi^\dagger|0\rangle = 1$ とすると，

$$Q = a^\dagger \psi + \psi^\dagger a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{d}_f + \mathrm{d}_f^*).$$

9.4 ウィッテンのモース理論

9.4.1 ウィッテン複体

n 次元リーマン有向多様体 (M, g) とモース関数 $f : M \to \mathbb{R}$ に対し，

$$\mathrm{d}_f = \mathrm{e}^{-f} \circ \mathrm{d} \circ \mathrm{e}^f : \Omega^q(M) \to \Omega^{q+1}(M) \quad (q = 0, \ldots, n-1)$$

とおくと，$\mathrm{d}_f \mathrm{d}_f = 0$ である．$t \geq 0$ に対し複体 $(\Omega^\bullet(M), \mathrm{d}_{tf})$ をウィッテン複体という．そのコホモロジーは M のドラーム・コホモロジーに同型である．

さらに $\mathrm{d}_f^* : \Omega^{q+1}(M) \to \Omega^q(M)$ を $\mathrm{d}_f^* = \mathrm{e}^f \circ \mathrm{d}^* \circ \mathrm{e}^{-f}$ で定義すると，$\mathrm{d}_f^* \mathrm{d}_f^* = 0$ であり，M がコンパクトならば，$\langle \alpha, \mathrm{d}_f^* \beta \rangle_g = \langle \mathrm{d}_f \alpha, \beta \rangle_g$ である．

$\Delta_f = \mathrm{d}_f^* \mathrm{d}_f + \mathrm{d}_f \mathrm{d}_f^* = (\mathrm{d}_f + \mathrm{d}_f^*)^2$ をウィッテン・ラプラシアンとよぶ．M がコンパクトならば，

$$\langle \alpha, \Delta_f \alpha' \rangle_g = \langle \mathrm{d}_f \alpha, \mathrm{d}_f \alpha \rangle_g + \langle \mathrm{d}_f^* \alpha, \mathrm{d}_f^* \alpha \rangle_g = \langle \Delta_f \alpha, \alpha' \rangle_g.$$

したがって，Δ_f の固有値は 0 以上の実数である．固有値 0 に対する固有関数，すなわち $\Delta_f \alpha = 0$ である微分形式 α を Δ_f 調和形式とよぶ．M がコンパクトならば，q 次 Δ_f 調和形式全体のなすベクトル空間は，M の q 次ドラーム・コホモロジーに同型である．

臨界点の近傍の局所座標系 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ に対し，

$$f = -\sum_{i=1}^{\lambda} (x^i)^2 + \sum_{i=\lambda+1}^{n} (x^i)^2, \quad g = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x^i \cdot \mathrm{d}x^i$$

である場合，$t > 0$ に対し，$\alpha = \mathrm{e}^{-t\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^\lambda$ とおくと，$\Delta_{tf}\alpha = 0$ である．α は，臨界点から離れると，t が大きいほど急に減衰する．

M はコンパクトであるとする．もし α が M 全体に拡張できるならば，モース指数 λ の臨界点に対して λ 次 Δ_{tf} 調和形式が 1 次元あることになる．しかしそうは問屋が卸さなくて，モース指数の差が 1 である 2 つの臨界点を結ぶ勾配流があると，臨界点の近傍における Δ_{tf} 調和形式が M 全体に拡張できない．

余接ベクトル $\psi_p \in T_p^* M$ に対し，線型写像 $\varepsilon(\psi_p) : \bigwedge^q T_p^* M \to \bigwedge^{q+1} T_p^* M$ を $\varepsilon(\psi_p)\alpha_p = \psi_p \wedge \alpha_p$ によって定め，ベクトル場 ξ に対し，

$$L_\xi^* = (\mathrm{d}^* + \varepsilon(\psi))^2 = \mathrm{d}^* \varepsilon(\psi) + \varepsilon(\psi)\mathrm{d}^*, \quad \psi = g(\xi, -)$$

とおく．このとき，$\mathrm{d}_{tf} = \mathrm{d} + t\,\varepsilon(\mathrm{d}f),\ \mathrm{d}_{tf}^* = \mathrm{d}^* + t\,\iota(\Delta f)$ より，

$$\Delta_{tf} = \Delta + t(L_{\nabla f} + L_{\nabla f}^*) + t^2 |\mathrm{d}f|^2 \quad (\Delta = \mathrm{d}^*\mathrm{d} + \mathrm{d}\mathrm{d}^*).$$

$L_{\nabla f} + L^*_{\nabla f}$ は 1 階微分作用素の項が相殺し，関数をかける作用素になる．この関数を h_f とおく．f の臨界点での h_f のテイラー展開は，0, 1 次の項が消える．

$V_t = th_f + t^2|\mathrm{d}f|^2$ とおく．Δ_{tf} を量子力学のハミルトニアンと見ると，V_t はポテンシャルに相当する．$p \in M$ が f の臨界点ならば $V_t(p) = 0$ であり，臨界点でないならば，$\lim_{t\to\infty} V_t(p) = \infty$ である．

古典力学ではエネルギー最小の状態は f の臨界点に 1 対 1 対応する．量子力学では，モース指数の差が 1 である 2 つの臨界点を結ぶ勾配流がある場合，f の臨界点に対して Δ_{tf} 調和形式を作ることができないことがある．これを，勾配流に対応するトンネル効果により f の臨界点に対応する状態が不安定になる事態と解釈する．

9.4.2 ウィッテン・ラプラシアンの固有値の局所化公式

ウィッテン・ラプラシアン Δ_{tf} の固有値 0 の固有関数は，多様体の大域的形状に関する非自明な情報をもっている．その非自明さは量子論における零点振動の不思議に似ている．そこでボーア＝ゾンマーフェルトの量子化規則に立ちかえってみよう．すなわち，Δ_{tf} 調和関数だけでなく，Δ_{tf} の固有関数で固有値が小さいものも一緒に考えれば，古典力学的描像が適切になる，すなわちトンネル効果がなく，f の臨界点の近くに局在化した固有関数が M 全体に延びることが予想される．

ヒルベルト空間上の自己共役作用素 H の固有値が下に有界であるとき，すべての固有値を重複度をこめて $\lambda_1(H) \leq \lambda_2(H) \leq \ldots$ とする．

f を n 次元コンパクト有向リーマン多様体 (M, g) 上のモース関数とし，$\Delta^{(\mu)}_{tf}$ を μ 次微分形式に作用するウィッテン・ラプラシアンとする．これに対し，ボーア＝ゾンマーフェルトの量子化規則が次の定理の形に具現化する．

定理 9.4.1 臨界点 p における測地的法座標系に関する h_f のテイラー展開の 2 次の項を $(h_f)^{(2)}_p$ とすると，

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\lambda_n(\Delta^{(\mu)}_{tf})}{t} = \lambda_n\left(\bigoplus_{p\in M^f(\mu)}\left(-\sum_{i=1}^{n}\partial_i{}^2 + (h_f)^{(2)}_p\right)\right).$$

$-\sum_{i=1}^{n}\partial_i{}^2 + (h_f)^{(2)}_p$ は調和振動子のハミルトニアンであり，固有関数はエルミート多項式を用いて書くことができる．

定理の証明には次の補題が用いられる．

補題 9.4.1 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を台が局所有限で $\displaystyle\sum_{\alpha\in A}\rho_\alpha{}^2 = 1$ であるような $\mathbb{R}^n$ 上の C^∞ 関数の族とする．D, D_i $(i = 1, \ldots, m)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の C^∞ 関数を係数とする 1 階偏微分作用素とし，D_i は 0 階の項をもたないとする．このとき

$$H = -\left(\sum_{i=1}^{m} D_i D_i\right) + D \text{ とおくと，}$$

$$H = \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha H \rho_\alpha - \sum_{\alpha,\, i} (D_i \rho_\alpha)^2.$$

証明 $[\rho_\alpha,\, [\rho_\alpha,\, D_i]] = 0$ より，

$$\begin{aligned}[\rho_\alpha,\, [\rho_\alpha,\, -D_i D_i]] &= -[\rho_\alpha,\, [\rho_\alpha,\, D_i] D_i] - [\rho_\alpha,\, D_i[\rho_\alpha,\, D_i]] \\ &= -2\, [\rho_\alpha,\, D_i][\rho_\alpha,\, D_i] = -2(D_i \rho_\alpha)^2.\end{aligned}$$

$$\sum_{\alpha \in A} [\rho_\alpha,\, [\rho_\alpha,\, H]] = \sum_{\alpha \in A} (\rho_\alpha \rho_\alpha H + H \rho_\alpha \rho_\alpha - 2\rho_\alpha H \rho_\alpha) = 2H - 2\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha H \rho_\alpha.$$

よって $[\rho_\alpha,\, [\rho_\alpha,\, D]] = 0$ より結論が従う． □

f を n 次元コンパクト有向リーマン多様体 $(M,\, g)$ 上のモース関数とし，$\Delta_{tf}^{(\mu)}$ を μ 次微分形式に作用するウィッテン・ラプラシアンとする．$c > 0$ に対し，$\Delta_{tf}^{(\mu)}$ の固有関数で固有値は c 以下のもの全体の張るベクトル空間を $\Omega_{\leq c}^{\mu}$ とすると，複体 $(\Omega_{\leq c}^{\bullet},\, \mathrm{d}_{tf})$ が得られる．これをフィルトレーションつきウィッテン複体とよぶ．$\Omega_{\leq c}^{\mu}$ は十分大きい $t > 0$ に対し，臨界点の情報だけで決まり，境界作用素 d_{tf} は勾配流＝インスタントンのモジュライ空間の情報から決まる．

第 10 章
特性類

いきなりコホモロジーを取るのではなく，まず固有値の小さいものだけを残す．前章の最後にそのような考え方，フィルトレーションつき複体というものが登場した．これはホモロジー代数に漸近展開の手法を導入するものである．位相空間の問題をフィルトレーションつき複体に写し取って解決するのが代数トポロジーの常套手段である．

スペクトル系列はその際必須となる技法である．添え字が 3 つもあるが，それぞれ意味合いが異なっていることに注意が必要である．

10.1 スペクトル系列

10.1.1 フィルトレーションつき複体

アーベル群の複体に対し，コチェインの群がフィルトレーションをもち，境界作用素がフィルトレーションつきアーベル群の射であるとき，この複体を **フィルトレーションつき複体** という．それらの間の射は境界作用素・フィルトレーションと両立するものとして定義される．フィルトレーションは，ホモロジー代数に，漸近展開に類似した近似の概念をもたらす．

アーベル群 C 上のフィルトレーション $F^\bullet C$ および C の部分群 A に対し，A 上に誘導されるフィルトレーションを $F^pA = F^pC \cap A$ によって定義する．以下，この記法を頻繁に用いる．

フィルトレーションつき複体 $(F^\bullet C^\bullet, d)$ に対し，コホモロジー群 $H^n = H^nC^\bullet = Z^n/B^n$ のフィルトレーションが $F^pH^n = F^pZ^n/F^pB^n$ によって与えられる．以下，

$$\mathrm{gr}^p_F H^n = \frac{F^pH^n}{F^{p+1}H^n} \cong \frac{F^pZ^n}{F^{p+1}Z^n + F^pB^n} \cong \frac{F^pZ^n/F^{p+1}Z^n}{F^pB^n/F^{p+1}B^n}$$

を計算する方法について述べる．

10.1.2　コホモロジー群の漸近展開

F^pC^{p+q} の 2 種類の部分群

$$
\begin{aligned}
{}^pZ_r[q] &= \{x \in F^pC^{p+q} \mid dx \in F^{p+r}C^{p+q+1}\},\\
{}^pB_r[q] &= F^pC^{p+q} \cap dF^{p+1-r}C^{p+q-1}
\end{aligned}
$$

を考える．大事なのは

$$
{}^{p+r}B_r[q-r+1] = d({}^pZ_{r-1}[q]) = dF^{p+1}({}^pZ_r[q])
$$

という両者の関係である．

これらは

$$
\begin{gathered}
{}^pZ_{r-1}[q] \supset {}^pZ_r[q] \supset F^pZ^{p+q} \supset F^pB^{p+q} \supset {}^pB_r[q] \supset {}^pB_{r-1}[q],\\
F^pZ^{p+q} = \bigcap_r {}^pZ_r[q], \quad F^pB^{p+q} = \bigcup_r {}^pB_r[q]
\end{gathered}
$$

をみたす．アーベル群の列 ${}^pZ_r[q]$ はコサイクルの群 F^pZ^{p+q} を外から近似し，列 ${}^pB_r[q]$ はコバウンダリーの群 F^pB^{p+q} を中から近似している．

F^pC^{p+q} の部分群 ${}^pZ_r[q]$, ${}^pB_r[q]$ を $\mathrm{gr}_F^pC^{p+q}$ に射影したものをそれぞれ $\overline{Z}_r^{p,q}$, $\overline{B}_r^{p,q}$ とする．$E_r^{p,q} = \overline{Z}_r^{p,q}/\overline{B}_r^{p,q}$ とおくと，

$$
E_r^{p,q} = \frac{{}^pZ_r[q]}{{}^pB_r[q] + F^{p+1}({}^pZ_r[q])}.
$$

列 $E_r^{p,q}\,(r \geq 1)$ は $\mathrm{gr}_F^pH^{p+q}$ を近似していると見ることができる．

10.1.3　スペクトル系列

$d({}^pZ_r[q]) \subset {}^{p+r}Z_r[q-r+1]$ および

$$
d({}^pB_r[q]) = 0, \quad dF^{p+1}({}^pZ_r[q]) = {}^{p+r}B_r[q-r+1]
$$

より，d は準同型 $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ を誘導する．$dd = 0$ より，

$$
E_r^{p-r,q+r-1} \overset{d_r^{p-r,q+r-1}}{\longrightarrow} E_r^{p,q} \overset{d_r^{p,q}}{\longrightarrow} E_r^{p+r,q-r+1}
$$

の合成は 0 である．

$$
{}^pZ_{r+1}[q] = \mathrm{Ker}\left({}^pZ_r[q] \overset{d}{\to} F^{p+r}C^{p+q+1} \to \mathrm{gr}_F^{p+r}C^{p+q+1}\right)
$$

より，

$$
\mathrm{Ker}(d_r^{p,q}) = \frac{{}^pZ_{r+1}[q]}{{}^pB_r[q] + F^{p+1}({}^pZ_{r+1}[q])} = \frac{\overline{Z}_{r+1}^{p,q}}{\overline{B}_r^{p,q}}.
$$

また，$d({}^{p-r}Z_r[q+r-1]) = {}^pB_{r+1}[q] \supset {}^pB_r[q]$ より，

$$
\mathrm{Im}(d_r^{p-r,q+r-1}) = \frac{{}^pB_{r+1}[q]}{{}^pB_r[q] + F^{p+1}({}^pB_{r+1}[q])} = \frac{\overline{B}_{r+1}^{p,q}}{\overline{B}_r^{p,q}}.
$$

したがって,

$$\frac{\operatorname{Ker} d_r^{p,q}}{\operatorname{Im} d_r^{p-r,q+r-1}} = \frac{\overline{Z}_{r+1}^{p,q}}{\overline{B}_{r+1}^{p,q}} = E_{r+1}^{p,q}.$$

任意の $r \geq r_0$ に対して $d_r = 0$ である場合,

$$E_{r_0}^{p,q} = E_{r_0+1}^{p,q} = \cdots = E_\infty^{p,q} = \mathrm{gr}_F^p H^{p+q}.$$

上の構成で, ${}^pZ_r[q]$ の定義は自然だが, ${}^pB_r[q]$ の方には仕掛けがあるので補足する. ${}^pZ_{r+1}[q] \subset {}^pZ_r[q]$ は,

$$[d] : {}^pZ_r[q] \to \frac{{}^{p+r}Z_r[q-r+1]}{F^{p+r+1}({}^{p+r}Z_r[q-r+1])}$$

の核として得られる. この写像が $\dfrac{{}^pZ_r[q]}{F^{p+1}({}^pZ_r[q])}$ 上の準同型を誘導するために, ターゲットをさらに ${}^{p+r}B_r[q-r+1] = dF^{p+1}({}^pZ_r[q])$ で割る. これが ${}^pB_r[q]$ を上のように定義した理由である. さらにこのとき, ${}^pB_{r+1}[q] \supset {}^pB_r[q]$ は, $d : {}^{p-r}Z_r[q+r-1] \to {}^pZ_r[q]$ の像として得られる.

定義 10.1.1 複体の列 $\{(E_r^\bullet, d_r)\}$ で, $E_{r+1}^\bullet$ が $(E_r^\bullet, d_r)$ のコホモロジー群によって与えられるものを, **スペクトル系列** という.

$r \geq r_0$ に対して $d_r = 0$ であるとき, スペクトル系列は E_{r_0} 項で**退化する**という. このとき, $E_{r_0}^{p,q} = E_{r_0+1}^{p,q} = \cdots = E_\infty^{p,q}$.

定義 10.1.2 スペクトル系列 $\{E_r^{p,q}\}_{q\geq 0}$, $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ において, $x \in E_{r_0}^{p,q}$ が **転入的** とは, $r_0 \leq r \leq q$ に対し, $d_r x = 0$ となることである. このとき $d_{q+1}x \in E_{q+1}^{p+q+1,0}$ を x の **転入** とよぶ.

10.1.4 二重複体

アーベル群の族 $\{C^{p,q}\}_{p,q\geq 0}$ と準同型の族 $\{d^{p,q} : C^{p,q} \to C^{p+1,q},\ \delta^{p,q} : C^{p,q} \to C^{p,q+1}\}$ の組 $(C^{\bullet,\bullet}, (d, \delta))$ で,

$$d^{p+1,q}d^{p,q} = 0, \quad \delta^{p+1,q}d^{p,q} = d^{p,q+1}\delta^{p,q}, \quad \delta^{p,q+1}\delta^{p,q} = 0$$

をみたすものを **二重複体** という.

$$\hat{C}^n = \bigoplus_{p\geq 0} C^{p,n-p}, \quad F^p\hat{C}^n = \bigoplus_{p'\geq p} C^{p',n-p'}, \quad F'^q\hat{C}^n = \bigoplus_{q'\geq q} C^{n-q',q'},$$

$$D^n = \bigoplus_{p\geq 0}(d^{p,n-p} + (-1)^p\delta^{p,n-p}) : \hat{C}^n \to \hat{C}^{n+1}$$

とおくと, $(F^\bullet\hat{C}^\bullet, D)$, $(F'^\bullet\hat{C}^\bullet, D)$ はフィルトレーションつき複体になる. これらを $(C^{\bullet,\bullet}, (d, \delta))$ の全複体とよぶ. $\bigcap_p F^p\hat{C}^n = \bigcap_q F'^q\hat{C}^n = 0$ がなりたつ.

$(F^\bullet \hat{C}^\bullet, D)$ の場合,

$$E_1^{p,q} \cong H^q C^{p,\bullet}, \qquad E_2^{p,q} \cong H^p E_1^{*,q} \cong H^p H^q C^{*,\bullet}.$$

全複体の 2 つのフィルトレーションに対するスペクトル系列を比較することにより，以下の定理が証明できる．普通はスペクトル系列を用いずに直接がんばって示すけれど．

定理 10.1.1 (5-補題) アーベル群の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} A_0 & \to & A_1 & \to & A_2 & \to & A_3 & \to & A_4 \\ \downarrow \varphi_0 & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 \\ B_0 & \to & B_1 & \to & B_2 & \to & B_3 & \to & B_4 \end{array}$$

が横方向について完全列であるとする．

(1) φ_1, φ_3 が単射，φ_0 が全射ならば，φ_2 は単射．

(2) φ_1, φ_3 が全射，φ_4 が単射ならば，φ_2 は全射．

証明 可換図式を二重複体と見る．横方向のコホモロジーを取ると，中の 6 項は 0 になる．

(1) 縦方向のコホモロジーを取ると，仮定より，B_0, A_1, A_3 のところが 0 になる．A_2 のところが 0 でないとすると，相殺する項がないので，E_∞ まで残る．よって A_2 のところは 0.

(2) 縦方向のコホモロジーを取ると，仮定より，B_1, B_3, A_4 のところが 0 になる．よって (1) と同様に，B_2 のところが 0 になる． □

定理 10.1.2 複体の完全列 $0 \to C'^\bullet \underset{i}{\to} C^\bullet \underset{j}{\to} C''^\bullet \to 0$ は，コホモロジー群の長完全列

$$H^n C' \to H^n C \to H^n C'' \to H^{n+1} C' \to H^{n+1} C$$

を誘導する．

証明 複体の完全列を二重複体と見る．横方向のコホモロジーを取るとすべての項が 0 になる．

縦方向のコホモロジーを取る．$H^n C' \underset{i_*}{\to} H^n C \underset{j_*}{\to} H^n C''$ は完全．そうでないとすると，$\mathrm{Ker}(j_*)/\mathrm{Im}(i_*)$ のところは相殺する項がないので E_∞ まで残るからである．

次いで横方向のコホモロジーを取ったものを E_2 項とすると，$d_2 : \mathrm{Ker}(i_*) \to \mathrm{Coker}(j_*)$ は同型．そうでないとすると，d_2 の核・余核のところは相殺する項がないので E_∞ まで残るからである．${d_2}^{-1}$ が $H^n C'' \to H^{n+1} C'$ を与え，長完全列が得られる． □

10.2 特異コホモロジー

10.2.1 特異単体

ドラーム・コホモロジーは多様体に対して実ベクトル空間を対応させる不変量だった．これを 2 つの方向に一般化する．すなわち位相空間に対してアーベル群を対応させる不変量を与えよう．

位相空間 X に対し，n 次元幾何単体 Δ^n から X への連続写像を X 上の n 次元 **特異単体** という．その全体の集合を $S_n(X)$ と書く．順序を保つ写像 $f:[n]\to[m]$ は写像 $f^*: S_m(X)\to S_n(X)$, $f^*(\sigma)=\sigma\circ f_*$ を誘導する．また連続写像 $\varphi: X\to Y$ は，写像 $\varphi_\#: S_n(X)\to S_n(Y)$, $\varphi_\#(\sigma)=\varphi\circ\sigma$ を誘導する．連続写像 $\varphi: X\to Y, \psi: Y\to Z$ に対し，$(\psi\circ\varphi)_\#=\psi_\#\circ\varphi_\#$ である．

$S_n(X)$ を基底とする自由アーベル群を $S_n(X)_\mathbb{Z}$ で表し，アーベル群 K に対し，$S_n(X, K)=S_n(X)_\mathbb{Z}\otimes K$ とする．準同型

$$\partial=\partial^{(n)}=\sum_{i\in[n+1]}(-1)^i \mathrm{f}_i{}^*: S_{n+1}(X, K)\to S_n(X, K)$$

を考えると，$\mathrm{f}_j\mathrm{f}_i=\mathrm{f}_i\mathrm{f}_{j-1}\ (i<j)$ より，$\partial^{(n)}\partial^{(n+1)}=0$ である．

$S_n(X)$ から K への写像全体のなす集合を $S^n(X, K)$ とする．これは自然なアーベル群の構造をもち，$S_n(X)_\mathbb{Z}$ から K への準同型全体の集合と同一視される．K が可換環 A 上の加群である場合，$S^n(X, K)$ も A 上の加群になる．

$\delta=\delta^{(n)}: S^n(X, K)\to S^{n+1}(X, K)$ を $\delta(\alpha)(\sigma)=\alpha(\partial\sigma)$ で定義すると，$\delta^{(n)}\delta^{(n-1)}=0$ がなりたつ．

10.2.2 特異チェイン複体

位相空間 X に対し，複体 $S_\bullet(X)_\mathbb{Z}=(\{S_n(X, K)\}_{n\geq 0}, \partial)$ を K 係数の **特異チェイン複体** という．連続写像 $\varphi: X\to Y$ は，複体の射

$$\{\varphi_\#: S_n(X, K)\to S_n(Y, K)\}_{n\geq 0}$$

を誘導する．連続写像 $\varphi: X\to Y, \psi: Y\to Z$ に対し，$(\psi\circ\varphi)_\#=\psi_\#\circ\varphi_\#$ である．

複体 $S_\bullet(X, K)$ のホモロジー群

$$\mathrm{H}_n(X, K)=\mathrm{Ker}(\partial^{(n-1)})/\mathrm{Im}(\partial^{(n)})\quad(\partial^{(-1)}=0)$$

を X の n 次 **特異ホモロジー群** という．連続写像 $\varphi: X\to Y$ は準同型 $\varphi_*: \mathrm{H}_n(X, K)\to\mathrm{H}_n(Y, K)$ を誘導する．連続写像 $\varphi: X\to Y, \psi: Y\to Z$ に対し，$(\psi\circ\varphi)_*=\psi_*\circ\varphi_*$ である．したがって，同相 $\varphi: X\to Y$ は同型 $\varphi_*: \mathrm{H}_n(X, K)\to\mathrm{H}_n(Y, K)$ を誘導する．

また，複体 $S^\bullet(X, K) = (\{S^n(X, K)\}_{n\geq 0}, \delta)$ を K 係数の **特異コチェイン複体** という．連続写像 $\varphi : X \to Y$ は，複体の射

$$\{\varphi^\# : S^n(Y, K) \to S^n(X, K)\}_{n\geq 0}$$

を誘導する．連続写像 $\varphi : X \to Y, \psi : Y \to Z$ に対し，$(\psi \circ \varphi)^\# = \varphi^\# \circ \psi^\#$ である．

複体 $S^\bullet(X)$ のコホモロジー群

$$\mathrm{H}^n(X, K) = \mathrm{Ker}(\delta^{(n)})/\mathrm{Im}(\delta^{(n-1)}) \quad (\mathrm{Im}(\delta^{(-1)}) = 0)$$

を X の n 次 **特異コホモロジー群** という．連続写像 $\varphi : X \to Y$ は準同型 $\varphi^* : \mathrm{H}^n(Y, K) \to \mathrm{H}^n(X, K)$ を誘導する．連続写像 $\varphi : X \to Y, \psi : Y \to Z$ に対し，$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$ である．したがって，同相 $\varphi : X \to Y$ は同型 $\varphi^* : \mathrm{H}^n(Y, K) \to \mathrm{H}^n(X, K)$ を誘導する．

特異ホモロジー群・特異コホモロジー群の係数は略して書くこともある．

K が可換環であるとき，自然な写像 $\mathrm{H}^n(X, K) \times \mathrm{H}_n(X, K) \to K$ を **クロネッカー積** あるいは評価という．

K が体であるとき，自然な K 加群の準同型 $\mathrm{H}^n(X, K) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_n(X), K)$ は同型である．

10.2.3 ドラームの定理

多様体 M 上の q 次元 C^∞ 特異単体とは，Δ^q から M への C^∞ 写像のこと，すなわち Δ^q の内部から M への C^∞ 写像であって，任意の $k \geq 0$ 次偏導関数が Δ^q に連続的に拡張されるものとする．

M の特異コホモロジー群の元は，C^∞ 特異単体に対する値によって決まることが言える．

ストークスの定理より，M 上の $q-1$ 次微分形式 β と q 次元 C^∞ 特異単体 $\sigma : \Delta^q \to M$ に対し，

$$\int_{\Delta^q} \sigma^* \mathrm{d}\beta = \sum_{i\in[n]} (-1)^i \int_{\Delta^{q-1}} (\sigma \circ \mathrm{f}_{i*})^* \beta$$

がなりたつ．

M 上の q 次微分形式 α と q 次元 C^∞ 特異単体 $\sigma : \Delta^q \to M$ に対し，$\int_{\Delta^q} \sigma^*\alpha \in \mathbb{R}$ を対応させる．この対応により，ドラーム・コホモロジー群 $\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(M)$ は実ベクトル空間として特異コホモロジー群 $\mathrm{H}^q(M, \mathbb{R})$ に同型であることが言える．

10.2.4 ホモトピー不変性

定理 10.2.1 位相空間 X から Y への連続写像 f, g がホモトピックならば，

$$f_* = g_* : \mathrm{H}_n(X,\, K) \to \mathrm{H}_n(Y,\, K),$$
$$f^* = g^* : \mathrm{H}^n(Y,\, K) \to \mathrm{H}^n(X,\, K).$$

位相空間 X から Y への連続写像 f が **ホモトピー同値写像** であるとは，連続写像 $g : Y \to X$ が存在して，$g \circ f$ が X 上の恒等写像とホモトピックであり，$f \circ g$ が Y 上の恒等写像とホモトピックであることである．ホモトピー同値写像が存在するとき，X, Y はホモトピー同値であるという．ホモトピー同値は同値関係である．一点とホモトピー同値な空間を可縮な空間という．

定理 10.2.1 より次が従う．

定理 10.2.2 ホモトピー同値 $f : X \to Y$ に対し，

$$f_* : \mathrm{H}_n(X,\, K) \to \mathrm{H}_n(Y,\, K), \quad f^* : \mathrm{H}^n(Y,\, K) \to \mathrm{H}^n(X,\, K)$$

はアーベル群の同型である．

定理 10.2.3 X を可縮な空間とすると，

$$\mathrm{H}_0(X,\, K) \cong K, \quad \mathrm{H}_n(X,\, K) = 0 \quad (n > 0).$$

$$\mathrm{H}^0(X,\, K) \cong K, \quad \mathrm{H}^n(X,\, K) = 0 \quad (n > 0).$$

定理 10.2.1 は次より従う．

定理 10.2.4 位相空間 X に対し，

$$i_{0*} = i_{1*} : \mathrm{H}_n(X,\, K) \to \mathrm{H}_n(X \times I,\, K),$$
$${i_0}^* = {i_1}^* : \mathrm{H}^n(X \times I,\, K) \to \mathrm{H}^n(X,\, K).$$

以下これを示す．

定義 10.2.1 (1) 複体 $C_\bullet = (\{C_n\}, \partial)$ から $C'_\bullet = (\{C'_n\}, \partial)$ への 2 つの射 $\varphi_\bullet = \{\varphi_n : C_n \to C'_n\}$, $\psi_\bullet = \{\psi_n : C_n \to C'_n\}$ に対し，準同型の列 $\{H_n : C_n \to C_{n+1}\}$ で $\partial H_n + H_{n-1}\partial = \psi_n - \varphi_n$ をみたすものを，$\varphi_\bullet$ から $\psi_\bullet$ への **ホモトピー** という．ホモトピーが存在するとき，$\varphi_\bullet, \psi_\bullet$ は **ホモトピック** であるという．
(2) 複体の間の射 $\varphi_\bullet : C_\bullet \to C'_\bullet$, $\psi : C'_\bullet \to C_\bullet$ に対し，$\psi \circ \varphi$ が $C_\bullet$ 上の恒等射とホモトピックであり，$\varphi \circ \psi$ が $C'_\bullet$ 上の恒等射とホモトピックであるとき，φ, ψ はホモトピー同値射であるといい，$C_\bullet, C'_\bullet$ は **ホモトピー同値** であるという．
(3) 複体 $C_\bullet = (\{C_n\}_{n \geq 0}, \partial)$ が $H_0(C_\bullet) \cong \mathbb{Z}$, $H_n(C_\bullet) = 0$ $(n > 0)$ をみたすとき，$C_\bullet$ は **アサイクリック** であると言う．

ホモトピック，ホモトピー同値はいずれも同値関係である．

次がただちに言える．

定理 10.2.5 複体 $(\{C_n\}, \partial)$ から $(\{C'_n\}, \partial)$ への 2 つの射 $\varphi_\bullet, \psi_\bullet$ の間のホモトピーが存在するならば，ホモロジー群に誘導される準同型 $\varphi_*, \psi_* : H_n(C_\bullet) \to H_n(C'_\bullet)$ は一致する．

定義 10.2.2 $C(n, p)$ を $\{1, \ldots, n\}$ 上の置換 τ で

$$\tau(1) < \cdots < \tau(p), \quad \tau(p+1) < \cdots < \tau(n)$$

をみたすもの全体の集合とする．写像 $P : \Delta^n \times C(n, p) \to \Delta^p \times \Delta^{n-p}$ を

$$P_\tau(x_1 \leq \cdots \leq x_n) = ((x_{\tau(1)} \leq \cdots \leq x_{\tau(p)}), (x_{\tau(p+1)} \leq \cdots \leq x_{\tau(n)}))$$

で定義すると，これは連続な全射である．$P_\tau \in S_n(\Delta^p \times \Delta^{n-p})$ と見なし，

$$P^{p, n-p} = \sum_{\tau \in C(n, p)} \operatorname{sgn}(\tau) P_\tau \in S_n(\Delta^p \times \Delta^{n-p})$$

と定義する．

位相空間 X に対し，$P^{n, 1}$ は，$i_{0\#}, i_{1\#} : S_n(X, K) \to S_n(X \times I, K)$ の間のホモトピー

$$S_n(X, K) \to S_{n+1}(X \times I, K), \quad \sigma \mapsto (\sigma \times \mathrm{id}_I)_\#(P^{n, 1})$$

を与える．これより定理 10.2.4 が従う．

10.2.5 空間の直積

定義 10.2.3 複体 $C_\bullet = (\{C_n\}, \partial_C)$，$C'_\bullet = (\{C'_n\}, \partial_{C'})$ に対し，複体 $(C \otimes C')_\bullet = (\{(C \otimes C')_n\}, \partial_{C \otimes C'})$ を，

$$(C \otimes C')_n = \bigoplus_p C_p \otimes_{\mathbb{Z}} C_{n-p},$$

$$\partial_{C \otimes C'}(x \otimes y) = \partial_C x \otimes y + (-1)^p x \otimes \partial_{C'} y \quad (x \in C_p)$$

によって定義する．

複体 $C_\bullet, C'_\bullet$ がアサイクリックならば，$(C \otimes C')_\bullet$ もアサイクリックである．

定理 10.2.6（アイレンベルグ＝ジルバーの定理）(1) 位相空間 X, Y に対する自然な複体の射

$$\xi_{X, Y} : S_\bullet(X \times Y)_{\mathbb{Z}} \to (S(X)_{\mathbb{Z}} \otimes S(Y)_{\mathbb{Z}})_\bullet$$

すなわち任意の連続写像 $f : X \to X', g : Y \to Y'$ に対し

$$(f_\# \otimes g_\#) \circ \xi_{X, Y} = \xi_{X', Y'} \circ (f \times g)_\#$$

をみたす複体の射で，

$$(\xi_{X,Y})_0(x, y) = x \otimes y \quad ((x, y) \in X \times Y = S_0(X \times Y)) \qquad (10.1)$$

となるものが存在する．さらにこれは自然なホモトピーを除いて一意的である．すなわち $\xi'_{X,Y}$ も同じ条件をみたすとすると，自然な準同型

$$(\varXi_{X,Y})_n : S_n(X \times Y)_{\mathbb{Z}} \to (S(X)_{\mathbb{Z}} \otimes S(Y)_{\mathbb{Z}})_{n+1}$$

が存在して，$\partial\varXi_n + \varXi_{n-1}\partial = \xi'_n - \xi_n$ がなりたつ．

(2) 位相空間 X, Y に対する自然な複体の射

$$\eta_{X,Y} : (S(X)_{\mathbb{Z}} \otimes S(Y)_{\mathbb{Z}})_\bullet \to S_\bullet(X \times Y)_{\mathbb{Z}}$$

すなわち任意の連続写像 $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ に対し

$$(f \times g)_\# \circ \eta_{X,Y} = \eta_{X',Y'} \circ (f_\# \otimes g_\#)$$

をみたす複体の射で，

$$(\eta_{X,Y})_0(x \otimes y) = (x, y) \quad (x \in X = S_0(X), y \in Y = S_0(Y)) \quad (10.2)$$

となるものが，自然なホモトピーを除いて一意的に存在する．

(3) 上の条件をみたす $\xi_{X,Y}$，$\eta_{X,Y}$ に対し，$\eta_{X,Y} \circ \xi_{X,Y}$ と $S_\bullet(X \times Y)_{\mathbb{Z}}$ 上の恒等射の間の自然なホモトピーが存在する．また，$\xi_{X,Y} \circ \eta_{X,Y}$ と $(S(X)_{\mathbb{Z}} \otimes S(Y)_{\mathbb{Z}})_\bullet$ 上の恒等射の間の自然なホモトピーが存在する．ゆえに $\xi_{X,Y}$，$\eta_{X,Y}$ は $S_\bullet(X \times Y)_{\mathbb{Z}}$ と $(S(X)_{\mathbb{Z}} \otimes S(Y)_{\mathbb{Z}})_\bullet$ の間のホモトピー同値を与える．

証明 (1) n について帰納的に $(\xi_{X,Y})_n$ を与える．

$\iota_n = \mathrm{id}_{\Delta^n}$, $\mathrm{d}_n = (\iota_n, \iota_n) \in S_n(\Delta^n \times \Delta^n)$ とおく．

$(\sigma, \tau) \in S_n(X \times Y)$ $(\sigma : \Delta^n \to X,\ \tau : \Delta^n \to Y)$ に対し，$(\sigma, \tau) = (\sigma \times \tau)_\#(\mathrm{d}_n)$．ゆえに

$$(\xi_{X,Y})_n(\sigma, \tau) = (\xi_{X,Y})_n(\sigma \times \tau)_\#(\mathrm{d}_n) = (\sigma_\# \otimes \tau_\#)(\xi_{\Delta^n,\Delta^n})_n(\mathrm{d}_n).$$

よって

$$\partial((\xi_{\Delta^n,\Delta^n})_n(\mathrm{d}_n)) = (\xi_{\Delta^n,\Delta^n})_{n-1}(\partial(\mathrm{d}_n))$$

となるように $(\xi_{\Delta^n,\Delta^n})_n(\mathrm{d}_n)$ を定めればよいが，

$$\partial\xi_{n-1}\partial = \xi_{n-2}\partial\partial = 0$$

であり，$(S(\Delta^n)_{\mathbb{Z}} \otimes S(\Delta^n)_{\mathbb{Z}})_\bullet$ がアサイクリックなので，それは可能である．

$\varXi_n$ の構成も n について帰納的におこなう．

$$\partial(\varXi_{\Delta^n,\Delta^n})_n(\mathrm{d}_n) + (\varXi_{\Delta^n,\Delta^n})_{n-1}\partial(\mathrm{d}_n) = ((\xi'_{\Delta^n,\Delta^n})_n - (\xi_{\Delta^n,\Delta^n})_n)(\mathrm{d}_n)$$

となるように $(\Xi_{\Delta^n,\,\Delta^n})_n(\mathrm{d}_n)$ を定めればよいが,

$$\begin{aligned}\partial(-\Xi_{n-1}\partial+\xi'_n-\xi_n)&=-(\partial\Xi_{n-1}+\Xi_{n-2}\partial)\partial+\partial(\xi'_n-\xi_n)\\&=-(\xi'_{n-1}-\xi_{n-1})\partial+\partial(\xi'_n-\xi_n)=0\end{aligned}$$

であり，$(S(\Delta^n)_{\mathbb{Z}}\otimes S(\Delta^n)_{\mathbb{Z}})_\bullet$ がアサイクリックなので，それは可能である．

(2) n について帰納的に $(\eta_{X,Y})_n$ を与える．

$\sigma\otimes\tau\in S_p(X)_{\mathbb{Z}}\otimes S_{n-p}(Y)_{\mathbb{Z}}$ $(\sigma:\Delta^p\to X,\ \tau:\Delta^{n-p}\to Y)$ に対し，$\sigma\otimes\tau=(\sigma_\#\otimes\tau_\#)(\iota_p\otimes\iota_{n-p})$．よって (1) と同様に，

$$\partial((\eta_{\Delta^p,\,\Delta^{n-p}})_n(\iota_p\otimes\iota_{n-p}))=(\eta_{\Delta^p,\,\Delta^{n-p}})_{n-1}(\partial(\iota_p\otimes\iota_{n-p}))$$

となるように $(\eta_{\Delta^p,\,\Delta^{n-p}})_n(\iota_p\otimes\iota_{n-p})$ を定めればよいが,

$$\partial\eta_{n-1}\partial=\eta_{n-2}\partial\partial=0$$

であり，$\Delta^p\times\Delta^{n-p}$ が可縮なので，それは可能である．自然なホモトピーを除いての一意性も同様に言える．

(3) $\eta\xi$ と id の間の自然なホモトピー

$$(\Phi_{X,Y})_n:S_n(X\times Y)_{\mathbb{Z}}\to S_{n+1}(X\times Y)_{\mathbb{Z}}$$

を n について帰納的に与える．

$(\xi_{X,Y})_0$, $(\eta_{X,Y})_0$ はたがいに逆写像なので，$(\Phi_{X,Y})_0=0$.

(1) と同様に,

$$\begin{aligned}&\partial(\Phi_{\Delta^n,\,\Delta^n})_n(\mathrm{d}_n)+(\Phi_{\Delta^n,\,\Delta^n})_{n-1}\partial(\mathrm{d}_n)\\&=\eta_{\Delta^n,\,\Delta^n}\circ\xi_{\Delta^n,\,\Delta^n}(\mathrm{d}_n)-\mathrm{d}_n\end{aligned}$$

となるように $(\Phi_{\Delta^n,\,\Delta^n})_n(\mathrm{d}_n)$ を定めればよいが,

$$\begin{aligned}\partial(-\Phi_{n-1}\partial+\eta_n\xi_n-\mathrm{id})&=-(\partial\Phi_{n-1}+\Phi_{n-2}\partial)\partial+\partial(\eta_n\xi_n-\mathrm{id})\\&=-(\eta_{n-1}\xi_{n-1}-\mathrm{id})\partial+\partial(\eta_n\xi_n-\mathrm{id})=0\end{aligned}$$

であり，$\Delta^n\times\Delta^n$ が可縮なので，それは可能である．

また，$\xi\eta$ と id の間の自然なホモトピー

$$(\Psi_{X,Y})_n:(S(X)_{\mathbb{Z}}\otimes S(Y)_{\mathbb{Z}})_n\to(S(X)_{\mathbb{Z}}\otimes S(Y)_{\mathbb{Z}})_{n+1}$$

を n について帰納的に与える．

$(\xi_{X,Y})_0$, $(\eta_{X,Y})_0$ はたがいに逆写像なので，$(\Psi_{X,Y})_0=0$.

(2) と同様に,

$$\begin{aligned}&\partial(\Psi_{\Delta^p,\,\Delta^{n-p}})_n(\iota_p\otimes\iota_{n-p})+(\Psi_{\Delta^p,\,\Delta^{n-p}})_{n-1}\partial(\iota_p\otimes\iota_{n-p})\\&=\eta_{\Delta^p,\,\Delta^{n-p}}\circ\xi_{\Delta^p,\,\Delta^{n-p}}(\iota_p\otimes\iota_{n-p})-\iota_p\otimes\iota_{n-p}\end{aligned}$$

となるように $(\Psi_{\Delta^p,\,\Delta^{n-p}})_n(\iota_p\otimes\iota_{n-p})$ を定めればよいが，

$$\partial(-\Psi_{n-1}\partial+\xi_n\eta_n-\mathrm{id})=-(\partial\Psi_{n-1}+\Psi_{n-2}\partial)\partial+\partial(\xi_n\eta_n-\mathrm{id})$$
$$=-(\xi_{n-1}\eta_{n-1}-\mathrm{id})\partial+\partial(\xi_n\eta_n-\mathrm{id})=0$$

であり，$(S(\Delta^p)_{\mathbb{Z}}\otimes S(\Delta^{n-p})_{\mathbb{Z}})_\bullet$ がアサイクリックなので，それは可能である．

□

なお，具体的に，

$$(\xi_{\Delta^n,\,\Delta^n})_n(\mathrm{d}_n)=\sum_{i\in[n]}\mathrm{f}^*_{\{i+1,\,\dots,\,n\}}(\iota_n)\otimes\mathrm{f}^*_{\{0,\,\dots,\,i-1\}}(\iota_n)$$
$$\in(S(\Delta^n)_{\mathbb{Z}}\otimes S(\Delta^n)_{\mathbb{Z}})_n,$$
$$(\eta_{\Delta^p,\,\Delta^{n-p}})_n(\iota_p\otimes\iota_{n-p})=P^{p,\,n-p}\in S_n(\Delta^p\times\Delta^{n-p})_{\mathbb{Z}}$$

のように与えることもできる．

定理より，可換環 K に対し，$S^\bullet(X\times Y,\,K)$ と $(S(X,\,K)\otimes_K S(Y,\,K))^\bullet$ がホモトピー同値であることも言える．

$[\alpha]\in\mathrm{H}^p(X,\,K),\ [\beta]\in\mathrm{H}^q(Y,\,K)$ に対し，

$$[\alpha]\times[\beta]=[\alpha\otimes\beta]\in H^{p+q}((S(X,\,K)\otimes_K S(Y,\,K))^\bullet)\cong\mathrm{H}^{p+q}(X\times Y,\,K)$$

を **クロス積** という．

$\mathrm{d}_X:X\to X\times X,\ \mathrm{d}_X(x)=(x,\,x)$ とする．$[\alpha]\in\mathrm{H}^p(X,\,K),\ [\beta]\in\mathrm{H}^q(X,\,K)$ に対し，$[\alpha]\cup[\beta]=\mathrm{d}_X^*([\alpha]\times[\beta])\in\mathrm{H}^{p+q}(X,\,K)$ を **カップ積** と言う．$\sigma\in S_{p+q}(X)$ に対し，

$$([\alpha]\cup[\beta])(\sigma)=\alpha(\mathrm{f}^*_{\{p+1,\,\dots,\,p+q\}}(\sigma))\,\beta(\mathrm{f}^*_{\{0,\,\dots,\,p-1\}}(\sigma))$$

と書ける．カップ積は結合的で，

$$\mathrm{H}^*(X,\,K)=\bigoplus_{q\geq0}\mathrm{H}^q(X,\,K)$$

は K 代数になる．$[\alpha]\in\mathrm{H}^p(X,\,K),\ [\beta]\in\mathrm{H}^q(X,\,K)$ に対し，$[\beta]\cup[\alpha]=(-1)^{pq}[\alpha]\cup[\beta]$ をみたす．

多様体 M に対し，ドラームの定理における同型 $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(M)\cong\mathrm{H}^*(M,\,\mathbb{R})$ は，外積をカップ積に写す環の同型になる．

10.2.6 錐・重心細分・切除性

$i\in[n]$ に対し，Δ^n の頂点 $v_i=(x_1,\,\dots,\,x_n)$ を

$$x_j=0\ (j\leq n-i),\quad x_j=1\ (j>n-i)$$

で定義し，重心を $b_n=\left(\dfrac{1}{n+1},\,\dfrac{2}{n+1},\,\dots,\,\dfrac{n}{n+1}\right)$ とおく．

$b \in \Delta^n, \sigma \in S_q(\Delta^n)$ に対し，$b * \sigma \in S_{q+1}(\Delta^n)$ を，$x \in \Delta^q$ に対し，

$$(b * \sigma)((1-t)v_0 + t\,\mathrm{f}_{0*}(x)) = (1-t)b + t\sigma(x), \quad 0 \le t \le 1$$

によって定義する．写像 $b * (\cdot)$ は準同型 $S_q(\Delta^n)_{\mathbb{Z}} \to S_{q+1}(\Delta^n)_{\mathbb{Z}}$ に拡張され，$\sigma \in S_q(\Delta^n)$ に対し，

$$\partial(b * \sigma) = \begin{cases} \sigma - b & q = 0 \\ \sigma - b * (\partial\sigma) & q > 0 \end{cases}$$

をみたす．

定義 10.2.4 自然な準同型

$$\mathrm{sd}_n : S_n(X)_{\mathbb{Z}} \to S_n(X)_{\mathbb{Z}}, \quad h_n : S_n(X)_{\mathbb{Z}} \to S_{n+1}(X)_{\mathbb{Z}}$$

を，

$$\mathrm{sd}_0 = \mathrm{id}, \quad \mathrm{sd}_n(\iota_n) = b_n * \mathrm{sd}_{n-1}(\partial\iota_n) \quad (n > 0),$$

$$h_0 = 0, \quad h_n(\iota_n) = b_n * (\mathrm{sd}_n(\iota_n) - \iota_n - h_{n-1}(\partial\iota_n)) \quad (n > 0)$$

によって定義する．$\{\mathrm{sd}_n\}$ を **重心細分** という．

定理 10.2.7 $\{\mathrm{sd}_n\}$ は複体の射であり，$\{h_n\}$ は恒等射と $\{\mathrm{sd}_n\}$ の間のホモトピーである．すなわち，

$$\partial\mathrm{sd}_n = \mathrm{sd}_{n-1}\partial, \quad \partial h_n + h_{n-1}\partial = \mathrm{sd}_n - \mathrm{id} \quad (n > 0).$$

証明 n についての帰納法によって示す．ι_n に作用させた場合に確かめればよい．

$$\begin{aligned} \partial\mathrm{sd}_n(\iota_n) &= \mathrm{sd}_{n-1}(\partial\iota_n) - b_n * \partial\mathrm{sd}_{n-1}(\partial\iota_n) \\ &= \mathrm{sd}_{n-1}(\partial\iota_n) - b_n * \mathrm{sd}_{n-2}(\partial\partial\iota_n) = \mathrm{sd}_{n-1}(\partial\iota_n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\partial(\mathrm{sd}_n(\iota_n) - \iota_n - h_{n-1}(\partial\iota_n)) \\ &\qquad = \mathrm{sd}_{n-1}(\partial\iota_n) - \partial\iota_n - (h_{n-2}\partial + \mathrm{sd}_{n-1} - \mathrm{id})(\partial\iota_n) = 0. \end{aligned}$$

よって，$\partial h_n(\iota_n) = \mathrm{sd}_n(\iota_n) - \iota_n - h_{n-1}(\partial\iota_n)$． □

定義 10.2.5 位相空間 X の部分集合の族 $\{A_\lambda\}$ が **切除的** であるとは，包含写像

$$\sum_\lambda S_n(A_\lambda)_{\mathbb{Z}} \subset S_n(X)_{\mathbb{Z}}$$

がホモトピー同値を与えることである．

Δ^n がコンパクト距離空間であることより次が従う．

補題 10.2.1 Δ^n の任意の開被覆 $\{U_\lambda\}$ に対し，自然数 m が存在して，

$$(\mathrm{sd}_n)^m(\iota_n) \in \sum_\lambda S_n(U_\lambda)_\mathbb{Z}.$$

この補題より次が従う．

定理 10.2.8 位相空間 X の部分集合の族 $\{A_\lambda\}$ で $\bigcup_\lambda {A_\lambda}^\circ = X$ をみたすものは切除的である（${A_\lambda}^\circ$ は A_λ の内部）．

位相空間 X の部分集合の対 $\{A, B\}$ が切除的ならば，複体の完全列

$$0 \to S_n(A \cap B)_\mathbb{Z} \to S_n(A)_\mathbb{Z} \oplus S_n(B)_\mathbb{Z} \to S_n(A)_\mathbb{Z} + S_n(B)_\mathbb{Z} \to 0$$

に定理 10.1.2 を適用して次の定理が得られる．

定理 10.2.9（マイヤー＝ヴィートリス完全列）位相空間 X の部分集合の対 $\{A, B\}$ が切除的ならば，係数をアーベル群 K とした完全列

$$\begin{aligned}\cdots &\to \mathrm{H}_{n+1}(X) \to \mathrm{H}_n(A \cap B) \to \mathrm{H}_n(A) \oplus \mathrm{H}_n(B)\\ &\to \mathrm{H}_n(X) \to \mathrm{H}_{n-1}(A \cap B) \to \cdots,\\ \cdots &\to \mathrm{H}^{n-1}(A \cap B) \to \mathrm{H}^n(X) \to \mathrm{H}^n(A) \oplus \mathrm{H}^n(B)\\ &\to \mathrm{H}^n(A \cap B) \to \mathrm{H}^{n+1}(X) \to \cdots\end{aligned}$$

が得られる．

この定理を用いて次を示すことができる．

定理 10.2.10 n を自然数とする．n 次元球面 S^n に対し，

$$\mathrm{H}_q(S^n, K) \cong \begin{cases} K & q = 0, n \\ 0 & q \neq 0, n, \end{cases} \qquad \mathrm{H}^q(S^n, K) \cong \begin{cases} K & q = 0, n \\ 0 & q \neq 0, n. \end{cases}$$

より一般に次がなりたつ．

定理 10.2.11 (1) n 次元コンパクト多様体 M に対し，$\mathrm{H}_n(M, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$.
(2) n 次元コンパクト向きづけ可能多様体 M に対し，$\mathrm{H}_n(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

n 次元コンパクト多様体 M に対し，$\mathrm{H}_n(M, \mathbb{Z}/2)$ の生成元を M の **mod 2 基本類** という．n 次元向きづけ可能コンパクト多様体 M に対し，$\mathrm{H}_n(M, \mathbb{Z})$ の 2 つある生成元のうちの一方を選んで，これを M の **基本類** という．

10.3 セール・スペクトル系列とオイラー類

10.3.1 局所系のコホモロジー

ここでは，被覆空間 $\mathcal{L} \to X$ において，ファイバー K および各点 $x \in X$ 上のファイバー $\mathcal{L}_x$ にアーベル群の構造が付与されていて，B の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と

局所自明化 $\mathcal{L}|U_\alpha \cong U_\alpha \times K$ が，任意の $x \in U_\alpha$ に対し，$\mathcal{L}_x$ と K の間の同型を誘導するとき，$\mathcal{L}$ を（アーベル群の） **局所系** とよぶことにする．

開集合 $U \subset X$ に対し，U 上の切断の全体 $\Gamma(U, \mathcal{L})$ はアーベル群であり，開集合 $V \subset U$ への制限 $\rho^U_V : \Gamma(U, \mathcal{L}) \to \Gamma(V, \mathcal{L})$ は準同型である．X 上の局所系の間の準同型（射） $\varphi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ を，アーベル群の準同型の族

$$\varphi = \{\varphi_U : \Gamma(U, \mathcal{L}_1) \to \Gamma(U, \mathcal{L}_2)\}_{U \subset X \text{ open}}$$

であって，$\rho^U_V \circ \varphi_U = \varphi_V \circ \rho^U_V$ をみたすものと定義する．

可換環 A 上の加群の局所系も同様に定義される．2 つの A 加群の局所系の間の準同型や A 上のテンソル積も定義される．

アーベル群 K に対し，自明な局所系 $B \times K$ を $\underline{K}$ と書くことにする．

アーベル群係数のコホモロジー群は，局所系係数に一般化される．位相空間 X 上の局所系 $\mathcal{L}$ に対し，$\mathcal{L}$ を係数とする特異コチェイン複体

$$S^q(X, \mathcal{L}) = \prod_{\sigma \in S_q(X)} \Gamma(\Delta^q, \sigma^*\mathcal{L}), \quad \delta : S^q(X, \mathcal{L}) \to S^{q+1}(X, \mathcal{L})$$

が定義される．（$\Gamma(\Delta^q, \sigma^*\underline{K}) = K$ に注意.）そのコホモロジー群を $\mathrm{H}^q(X, \mathcal{L})$ と書く．$\mathrm{H}^q(\mathcal{L})$ と略記することもある．

$\mathcal{L}$ が可換環 K 上の加群の局所系であるとき，$\mathrm{H}^q(X, \mathcal{L})$ は K 加群であり，$\mathrm{H}^*(X, \mathcal{L})$ は $\mathrm{H}^*(X, K)$ 加群である．K 加群の局所系 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}$ と K 上の準同型 $\mathcal{L}_1 \otimes_K \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}$ に対し，カップ積

$$\mathrm{H}^p(X, \mathcal{L}_1) \otimes_K \mathrm{H}^q(X, \mathcal{L}_2) \to \mathrm{H}^{p+q}(X, \mathcal{L})$$

が定義される．

また，定理 10.1.2 より次が従う．

定理 10.3.1 位相空間 X 上の局所系の完全列 $0 \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3 \to 0$ に対し，完全列

$$\cdots \to \mathrm{H}^q(\mathcal{L}_1) \to \mathrm{H}^q(\mathcal{L}_2) \to \mathrm{H}^q(\mathcal{L}_3) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^{q+1}(\mathcal{L}_1) \to \cdots$$

が誘導される．このときさらに $\mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$ が可換環 K 上の加群の局所系の準同型ならば,

$$\mathrm{H}^*(\mathcal{L}_1) \to \mathrm{H}^*(\mathcal{L}_2) \to \mathrm{H}^*(\mathcal{L}_3) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^*(\mathcal{L}_1)$$

は $\mathrm{H}^*(X, K)$ 加群の準同型である．

10.3.2 ファイバー束の誘導する局所系

ファイバー F のファイバー束 $\pi : E \to B$ とアーベル群 K に対し，アーベル群の族 $\{\mathrm{H}^q(E_x, K)\}_{x \in B}$ は，B の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と局所自明化 $E|U_\alpha \cong U_\alpha \times F$

によって誘導される局所自明化 $\bigsqcup_{x\in U_\alpha} \mathrm{H}^q(E_x,\, K) \cong U_\alpha \times \mathrm{H}^q(F,\, K)$ により，局所系

$$\mathcal{H}^q(F,\, K) = \bigsqcup_{x\in B} \mathrm{H}^q(E_x,\, K) \to B$$

を与える．K が可換環であるとき，カップ積

$$\cup : \mathcal{H}^p(F,\, K) \otimes_K \mathcal{H}^q(F,\, K) \to \mathcal{H}^{p+q}(F,\, K)$$

が定義される．

定理 10.3.2 ファイバー F のファイバー束 $\pi : E \to B$ とアーベル群 K に対し，$\mathrm{H}^{p+q}(E,\, K)$ に収束するスペクトル系列 $\{E_r^{p,\,q}\}$ を対応させるものであって，ファイバー束の射について自然であり，かつ

$$E_2^{p,\,q} = \mathrm{H}^p(B,\, \mathcal{H}^q(F,\, K))$$

であるものが存在する．これを **セール・スペクトル系列** という．

定理 10.3.3 K が可換環であるとき，セール・スペクトル系列 $\{E_r^{p,\,q}\}$ は，$r \geq 2$ に対しカップ積 $\cup : E_r^{p,\,q} \otimes_K E_r^{p',\,q'} \to E_r^{p+p',\,q+q'}$ をもち，

$$d_r(u \cup v) = (d_r u) \cup v + (-1)^{p+q} u \cup (d_r v) \quad (u \in E_r^{p,\,q},\ v \in E_r^{p',\,q'})$$

がなりたつ．$r = 2$ のときこの積はコホモロジー群のカップ積

$$\mathrm{H}^p(B,\, \mathcal{H}^q(F,\, K)) \otimes \mathrm{H}^{p'}(B,\, \mathcal{H}^{q'}(F,\, K)) \to \mathrm{H}^{p+p'}(B,\, \mathcal{H}^{q+q'}(F,\, K))$$

に一致し，$r > 2$ の場合は $r = 2$ のカップ積から誘導される．

セール・スペクトル系列は次のように構成される．

連続写像 $\sigma : \Delta^p \times \Delta^q \to E$ で，$\pi \circ \sigma(s,\, t)$ が $t \in \Delta^q$ によらないもの全体の集合を $S_{p,\,q}$ とし，$S_{p,q}$ から K への写像全体のなすアーベル群を $C^{p,\,q}$ とする．このときたがいに可換な境界準同型 $d' : C^{p,\,q} \to C^{p+1,\,q}$, $d'' : C^{p,\,q} \to C^{p,\,q+1}$ が定義され，

$$C^n = \bigoplus_q C^{n-q,\,q}, \quad d = d' + (-1)^p d'' : C^{p,\,q} \to C^{p+1,\,q} \oplus C^{p,\,q+1}$$

とおくと，$(C^\bullet,\, d)$ は複体である．この上の 2 つの減少フィルトレーション

$$F'^p C^n = \bigoplus_{p' \geq p} C^{n-p',\,p'}, \quad F''^p C^n = \bigoplus_{p' \geq p} C^{p',\,n-p'}$$

に対するスペクトル系列をそれぞれ $E'^{p,\,q}_r$, $E''^{p,\,q}_r$ とすると，

$$E'^{p,\,q}_2 = \begin{cases} \mathrm{H}^p(E,\, K) & q = 0 \\ 0 & q \neq 0 \end{cases}, \quad E''^{p,\,q}_2 = \mathrm{H}^p(B,\, \mathcal{H}^q(F,\, K))$$

がなりたつことが言える．

10.3.3 球面束とオイラー類

ファイバー F が n 次元球面 S^n と同相であるファイバー束 $\pi: E \to B$ を n 次元 **球面束** あるいは S^n 束という．$n \geq 1$ とする．このとき，アーベル群 K に対し自然な同型 $\mathcal{H}^0(F, K) \cong \underline{K}$ によって両者を同一視する．

セール・スペクトル系列により，完全列

$$0 \to E_\infty^{q,0} \to \mathrm{H}^q(E) \to E_\infty^{q-n,n} \to 0,$$

$$0 \to E_\infty^{q-n,n} \to \mathrm{H}^{q-n}(B, \mathcal{H}^n(F)) \overset{d_{n+1}}{\to} \mathrm{H}^{q+1}(B) \to E_\infty^{q+1,0} \to 0$$

が得られる．ただし係数 K は略す．よって次が従う．

定理 10.3.4（ギュシン完全列）$n \geq 1$ とする．n 次元球面束 $\pi: E \to B$ のファイバーを F とすると，完全列

$$\cdots \to \mathrm{H}^q(B) \overset{\pi^*}{\to} \mathrm{H}^q(E) \to \mathrm{H}^{q-n}(B, \mathcal{H}^n(F)) \overset{d_{n+1}}{\to} \mathrm{H}^{q+1}(B) \overset{\pi^*}{\to} \cdots$$

が成立する．K が可換環の場合，

$$\mathrm{H}^*(B) \to \mathrm{H}^*(E) \to \bigoplus_q \mathrm{H}^{q-n}(B, \mathcal{H}^n(F)) \to \mathrm{H}^*(B)$$

は $\mathrm{H}^*(B)$ 加群の準同型である．

可換環 K に対し，局所系 $\mathcal{H}^n(F, K)$ が自明であるとき，K 上向きづけ可能な球面束といい，$\mathcal{H}^n(F, K)$ と $\underline{K}$ の間の同型を K 上の向きという．K 上の向きが与えられているとき K 上向きづけられているという．$K = \mathbb{Z}$ の場合は「$\mathbb{Z}$ 上」ということばを省略する．任意の球面束は $\mathbb{Z}/2$ 上向きづけ可能で，$\mathbb{Z}/2$ 上の向きは一意的である．また，S^1 主束は向きづけ可能である．

向きの定める同型 $E_2^{0,n} = \mathrm{H}^0(B, \mathcal{H}^n(F)) \cong \mathrm{H}^0(B)$ によって $1 \in \mathrm{H}^0(B)$ に対応する元を $\omega \in E_2^{0,n} = E_{n+1}^{0,n}$ とする．

$$e = e(E) = -d_{n+1}(\omega) \in E_{n+1}^{n+1,0} = \mathrm{H}^{n+1}(B, K)$$

とおき，これを K 上向きづけられた n 次元球面束 E の **オイラー類** という．同型

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}^{q-n}(B) & \overset{\sim}{\to} & \mathrm{H}^{q-n}(B) \otimes \mathrm{H}^0(B, \mathcal{H}^n(F)) & \overset{\sim}{\to} & \mathrm{H}^{q-n}(B, \mathcal{H}^n(F)) \\ x & \mapsto & x \otimes \omega & \mapsto & x \cup \omega \end{array}$$

に注意．$x \in \mathrm{H}^{q-n}(B) = E_2^{q-n,0}$ に対し，$d_{n+1}x = 0$ より，$d_{n+1}(x \cup \omega) = (-1)^{q-n} x \cup (-e)$．よって次が得られる．

定理 10.3.5（ギュシン完全列）可換環 K 上向きづけられている n 次元球面

束 $\pi : E \to B$ に対し，完全列

$$\mathrm{H}^q(E) \xrightarrow{\pi_!} \mathrm{H}^{q-n}(B) \xrightarrow{\cup e} \mathrm{H}^{q+1}(B) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{H}^{q+1}(E) \xrightarrow{\pi_!} \mathrm{H}^{q-n+1}(B)$$

が成立する．

準同型 $\pi_! : \mathrm{H}^q(E) \to \mathrm{H}^{q-n}(B)$ を **ギュシン準同型** という．

定理 10.3.6 向きづけられている球面束 $\pi : E \to B$ が切断 $s : B \to E$, $\pi \circ s = \mathrm{id}$ をもつとき，$e(E) = 0$ である．

証明 $\pi^* : \mathrm{H}^q(B) \to \mathrm{H}^q(E)$ が単射になるので，ギュシン完全列より $e = 0$. □

ギュシン完全列は $n = 0$ の場合にもあるが，議論がやや異なる．ファイバー F が 0 次元球面すなわち 2 点であるファイバー束 $\pi : E \to B$ を二重被覆という．アーベル群 K に対し，局所系の完全列

$$0 \to \underline{K} \to \mathcal{H}^0(F, K) \to \underline{K} \to 0$$

がある．K が位数 2 の元をもたないとき，$\mathcal{H}^0(F, K) \cong \underline{K} \oplus \underline{K}$ である．

セール・スペクトル系列より，$\mathrm{H}^q(E, K) \cong \mathrm{H}^q(B, \mathcal{H}^0(F, K))$ が得られる．よって定理 10.3.1 より次が従う．

定理 10.3.7（ギュシン完全列）二重被覆 $\pi : E \to B$ に対し，K 係数コホモロジー群の完全列

$$\mathrm{H}^q(B) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{H}^q(E) \xrightarrow{\pi_!} \mathrm{H}^q(B) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^{q+1}(B) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{H}^{q+1}(E)$$

が得られる．K が可換環であるとき，上の $\pi^*, \pi_!, \delta$ は $\mathrm{H}^*(B)$ 加群の準同型を与える．特に $\delta(\alpha) = \alpha \cup \delta(1)$.

$K = \mathbb{Z}/2$ のとき，$e_{(2)} = e_{(2)}(E) = \delta(1) \in \mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z}/2)$ を E の **mod 2 オイラー類** という．

実 $n+1$ 次元ベクトル空間 V に対し，$V \setminus \{0\}$ への正の実数全体のなす乗法群の作用による商集合は，n 次元球面 S^n に同相である．これにより，V の向きと $H^n(S^n, \mathbb{Z})$ の生成元の間の自然な 1 対 1 対応を与えることができる．

上の構成により，位相空間 B 上のランク $n+1$ の実ベクトル束 E に対し，B 上の n 次元球面束 S_E が定義され，E の向きと S_E の向きの間の自然な 1 対 1 対応を与えることができる．

10.3.4 射影空間上の球面束

実射影空間 $\mathrm{P}^n(\mathbb{R})$ に対し，射影 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathrm{P}^n(\mathbb{R})$ を n 次元球面 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ に制限すると，二重被覆すなわち S^0 主束 $\pi : S^n \to \mathrm{P}^n(\mathbb{R})$ が得られる．その mod 2 オイラー類を $e_{(2)}$ とする．

最後の座標を 0 とすることで $S^n \subset S^{n+1}$, $\mathrm{P}^n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{P}^{n+1}(\mathbb{R})$ と見なせる．$S^\infty = \bigcup_n S^n$, $\mathrm{P}^\infty(\mathbb{R}) = \bigcup_n \mathrm{P}^n(\mathbb{R})$ とおくと，二重被覆 $\pi : S^\infty \to \mathrm{P}^\infty(\mathbb{R})$ が得られる．群 $S^0 = \mathbb{Z}/2$ は S^∞ に自由に作用し，その商集合が $\mathrm{P}^\infty(\mathbb{R})$ である．また，S^∞ は可縮である．よってギュシン完全列（定理 10.3.7）より，

$$\cup e_{(2)} : \mathrm{H}^q(\mathrm{P}^\infty(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{q+1}(\mathrm{P}^\infty(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

は同型．したがって，$e_{(2)} \mapsto w$ により，$\mathrm{H}^*(\mathrm{P}^\infty(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \cong (\mathbb{Z}/2)[w]$ が得られる．

$S^\infty \times S^n/S^0$ は $\mathrm{P}^n(\mathbb{R})$ にホモトピー同値であり，$\mathrm{P}^\infty(\mathbb{R})$ 上の S^n 束である．これにギュシン完全列（定理 10.3.5）を適用すると，$\mathrm{H}^*(\mathrm{P}^n(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \cong (\mathbb{Z}/2)[w]/(w^{n+1})$ が得られる．

これを用いて次が証明される．

定理 10.3.8（ボルスク＝ウラムの定理）任意の連続写像 $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ に対し，$f(\boldsymbol{x}) = f(-\boldsymbol{x})$ となる点 $\boldsymbol{x} \in S^n$ が存在する．

証明 $f(\boldsymbol{x}) = f(-\boldsymbol{x})$ となる点 $\boldsymbol{x}$ が存在しないとすると，

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|f(\boldsymbol{x}) - f(-\boldsymbol{x})|}(f(\boldsymbol{x}) - f(-\boldsymbol{x}))$$

により，$g : S^n \to S^{n-1}$ が定義され，$g(-\boldsymbol{x}) = -g(\boldsymbol{x})$ をみたす．よって g は $\overline{g} : \mathrm{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ を誘導し，$S^k \to \mathrm{P}^k(\mathbb{R})$ の mod 2 オイラー類を e_k とすると，$\overline{g}^* e_{n-1} = e_n$．これは ${e_{n-1}}^n = 0$, ${e_n}^n \neq 0$ に矛盾する． □

複素射影空間 $\mathrm{P}^n(\mathbb{C})$ に対し，射影 $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathrm{P}^n(\mathbb{C})$ を $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ に制限すると，S^1 主束 $\pi : S^{2n+1} \to \mathrm{P}^n(\mathbb{C})$ が得られる．そのオイラー類を e とする．

$S^\infty = \bigcup_n S^{2n+1}$, $\mathrm{P}^\infty(\mathbb{C}) = \bigcup_n \mathrm{P}^n(\mathbb{C})$ とおくと, S^1 主束 $\pi : S^\infty \to \mathrm{P}^\infty(\mathbb{C})$ が得られる．ギュシン完全列（定理 10.3.5）より，可換環 K に対し，

$$\cup e : \mathrm{H}^q(\mathrm{P}^\infty(\mathbb{C}), K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{q+2}(\mathrm{P}^\infty(\mathbb{C}), K)$$

は同型．したがって，$e \mapsto x$ により，$\mathrm{H}^*(\mathrm{P}^\infty(\mathbb{C}), K) \cong K[x]$ が得られる．

$S^\infty \times S^{2n+1}/S^1$ は $\mathrm{P}^n(\mathbb{C})$ にホモトピー同値であり，$\mathrm{P}^\infty(\mathbb{C})$ 上の S^{2n+1} 束である．これにギュシン完全列（定理 10.3.5）を適用すると，$\mathrm{H}^*(\mathrm{P}^n(\mathbb{C}), K) \cong K[x]/(x^{n+1})$ が得られる．

10.3.5 同変オイラー類・スティーフル＝ホイットニー類・チャーン類

位相群 G が自由に作用する可縮な空間 EG への G 作用の商空間 BG を，G の **分類空間** という．$BS^0 = \mathrm{P}^\infty(\mathbb{R})$, $BS^1 = \mathrm{P}^\infty(\mathbb{C})$ である．

G 空間 M に対し，$M_G = (EG \times M)/G$ とする．第 1 成分への射影により，

ファイバーが M と同相であるファイバー束 $M_G \to BG$ が得られる．M への G 作用が自明であるとき，M_G は $M \times BG$ と同相であり，作用が自由であるとき，M_G は M/G とホモトピー同値である．

G 空間 M 上のランク n の G 同変実ベクトル束 W に対し，ランク n の実ベクトル束 $W_G \to M_G$ が得られる．可換環 K に対し，W の G 不変な向きが与えられているとする．オイラー類 $e_G(W) = e(W_G) \in \mathrm{H}^n(M_G, K)$ を W の **同変オイラー類** という．

実ベクトル束は，各ファイバーに $S^0 = \{\pm 1\}$ が作用するので，S^0 同変ベクトル束と見なすことができる．ただし S^0 の底空間への作用は自明とする．

$K = \mathbb{Z}/2$ とする．位相空間 M 上のランク n の実ベクトル束 W に対し，

$$e_G(W) \in \mathrm{H}^n(M_G, \mathbb{Z}/2) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathrm{H}^k(M, \mathbb{Z}/2) \otimes \mathrm{H}^{n-k}(\mathrm{P}^\infty(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2).$$

$\mathrm{H}^*(\mathrm{P}^\infty(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \cong (\mathbb{Z}/2)[x]$ とおき，$e_G(W) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} w_k(W) \otimes x^{n-k}$ とする．$w_k(W) \in \mathrm{H}^k(M, \mathbb{Z}/2)$ を W の第 k **スティーフル＝ホイットニー類** という．

複素ベクトル束は，各ファイバーに $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ が作用するので，有向 S^1 同変実ベクトル束と見なすことができる．ただし S^1 の底空間への作用は自明とする．

$K = \mathbb{Z}$ とする．位相空間 M 上のランク n の複素ベクトル束 W に対し，

$$e_G(W) \in \mathrm{H}^{2n}(M_G, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathrm{H}^{2k}(M, \mathbb{Z}) \otimes \mathrm{H}^{2n-2k}(\mathrm{P}^\infty(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

有向 S^1 束 $S^\infty \to \mathrm{P}^\infty(\mathbb{C})$ のオイラー類を $-x$ とすると，$\mathrm{H}^*(\mathrm{P}^\infty(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]$ となる．$e_G(W) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k(W) \otimes x^{n-k}$ とする．$c_k(W) \in \mathrm{H}^{2k}(M, \mathbb{Z})$ を W の第 k **チャーン類** という．自然な写像 $\mathrm{H}^{2k}(M, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^{2k}_{\mathrm{dR}}(M)$ により，これはチャーン＝ヴェイユ理論で定義されたチャーン類に写される．

位相空間 M 上の実ベクトル束 W に対し，$p_k(W) = (-1)^k c_{2k}(W \otimes \mathbb{C}) \in \mathrm{H}^{4k}(M; \mathbb{Z})$ を W の第 k **ポントリャーギン類** という．

10.3.6 特性類

K をアーベル群とする．位相空間 X 上のベクトル束 E にコホモロジー類 $c(E) \in \mathrm{H}^*(X, K)$ を対応させるもので，任意の X, Y 上のベクトル束 E, F の間のカルテシアン射 $\tilde{\varphi}: E \to F$, $\varphi: X \to Y$ に対し，$c(E) = \varphi^* c(F)$ がなりたつとき，$c(E)$ を E の **特性類** とよぶ．スティーフル＝ホイットニー類，ポントリャーギン類は実ベクトル束の特性類である．オイラー類は有向ベクトル束の特性類である．チャーン類は複素ベクトル束の特性類である．

コンパクト有向多様体 M に対し，M の $\mathbb{Z}$ 係数基本類で TM の $\mathbb{Z}$ 係数特

性類を評価して得られる整数を特性数という．コンパクト多様体 M に対し，M の $\mathbb{Z}/2$ 係数基本類で TM の $\mathbb{Z}/2$ 係数特性類を評価して得られる $\mathbb{Z}/2$ の元も特性数とよぶ．

ベクトル束 E, E' が **安定同値** であるとは，自明なベクトル束 ε が存在して，$E \oplus \varepsilon \cong E' \oplus \varepsilon$ であることとする．スティーフル＝ホイットニー類，チャーン類，ポントリャーギン類は，ベクトル束の安定同値類に対して定まっている．

10.3.7　コボルディスム

コンパクト境界つき多様体 Y の境界の連結成分を2つに分けたものを X_0, X_1 とするとき，Y を X_0 と X_1 の間の **コボルディスム** という．そして2つの多様体 X_0, X_1 に対し，その間のコボルディスムが存在するとき，X_0, X_1 は **コボルダント** であるという．コボルダントは同値関係である．その同値類を **コボルディスム類** という．

Y に向きを入れたものを有向コボルディスム，それによる同値関係を有向コボルダント，同値類を有向コボルディスム類という．次の定理が知られている．

定理 10.3.9　2つのコンパクト有向多様体が有向コボルダントであるのは，任意のスティーフル＝ホイットニー類の積の特性数とポントリャーギン類の積の特性数がたがいに一致することに同値である．

n 次元境界つき多様体 Y を $\mathbb{R}^{n+m}$ に埋めこんだときの法ベクトル束を ν とする．$(\mathrm{id}, 0) : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^k$ を合成すると，Y の $\mathbb{R}^{n+m+k}$ への埋めこみが得られる．このとき法ベクトル束は ν に自明なベクトル束を直和したものになる．このようにして，Y の埋めこみの列で，埋めこんだ先が大きくなっていく列が得られ，法ベクトル束の列が得られる．法ベクトル束の列に対し，その構造群の列 $\mathrm{O}(m)$ が得られる．埋めこみ先の次元を増やしていくことを考えるとき，法ベクトル束については安定同値類を考えることになる．

有向コボルディスムを考えることは，埋めこみの法ベクトル束の構造群の列として $\mathrm{SO}(m) \subset \mathrm{O}(m)$ を考えることに相当している．

そこで，より一般に，$\mathrm{U}(m) \subset \mathrm{O}(2m)$, $\mathrm{SU}(m) \subset \mathrm{O}(2m)$, $\mathrm{Spin}(n) \subset \mathrm{O}(4m)$ などを，埋めこみの法ベクトル束の構造群の列とするコボルディスムを考えることもできる．

第 11 章
ディラック作用素

物理学者ディラックは，シュレーディンガー方程式を相対論的に補正するにあたって，シュレーディンガー方程式が失ってはならない本質が，確率密度の連続の方程式を導くところに，したがって時間について 1 階であるところにあると喝破し，ラプラシアンの平方根と見なせる 1 階微分作用素を見出した．後にこれはトポロジーにおいて本質的に重要な作用素であることが判明し，数学者たちによってディラック作用素と名づけられることになる．

11.1 クリフォード代数

11.1.1 ラプラシアンの平方根

微分作用素 $\partial_j = \partial/\partial x_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ に対し，2 階微分作用素 $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_j{}^2$ をラプラシアンという．これに対し，1 階微分作用素 D で $D^2 = -\Delta$ となるものを考えたい．

$n = 1$ の場合は $D = \pm i\partial_1$ でよい．$n = 2$ の場合，$\Delta = (\partial_1 + i\partial_2)(\partial_1 - i\partial_2)$ と因数分解することはできる．そこで，微分作用素が $\mathbb{C}^2$ に値をとる 2 変数関数に作用すると見て，

$$D = \begin{bmatrix} 0 & i\partial_1 + \partial_2 \\ i\partial_1 - \partial_2 & 0 \end{bmatrix} = i\sigma_1\partial_1 + i\sigma_2\partial_2$$

とおくと，$D^2 = -\Delta$．ここで $(i\sigma_j)^2 = -E$, $(i\sigma_2)(i\sigma_1) = -(i\sigma_1)(i\sigma_2)$.

一般の n の場合，微分作用素が $\mathbb{C}^m$ に値をとる n 変数関数に作用すると見る．そして，m 次複素正方行列 γ_j $(j = 1, \ldots, n)$ で $\gamma_j{}^2 = -E$, $\gamma_k\gamma_j = -\gamma_j\gamma_k$ $(j \neq k)$ をみたすものが見つかったとする．このとき $D = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j\partial_j$ とおくと，$D^2 = -\Delta$ である．D を **ディラック作用素** という．

問題は，n に対して m をどのように取ればこんな都合のよい複素正方行列 γ_j が存在するのかということである．これに答えるのがクリフォード代数の理

論である．

11.1.2　クリフォード代数

K を標数が 2 でない体とする．K ベクトル空間 V 上の二次形式とは，写像 $Q: V \to K$ であって，$Q(au) = a^2 Q(u)$ $(a \in K,\ u \in V)$ をみたし $\langle u, v\rangle = \dfrac{1}{2}(Q(u+v) - Q(u) - Q(v))$ が $u, v \in V$ について双線型であるものである．この双線型形式が非退化であるとき，Q は非退化であるという．

L を K ベクトル空間，L^* をその双対ベクトル空間，$\bigwedge L = \bigoplus_{n\geq 0} \bigwedge^n L$ を L 上の外積代数とする．$u \in L$, $\alpha \in L^*$ に対し，外積と内部積により，L 上の外積代数 $\bigwedge L = \bigoplus_{n\geq 0} \bigwedge^n L$ 上の線型変換 $\lambda(u)$, $\iota(\alpha)$ が定義される．これは，$(\lambda(u) + \iota(\alpha))^2 = \langle \alpha, u\rangle$ をみたし，K 代数 $\mathrm{End}_K(\bigwedge L)$ を生成する．ここで，$(u, \alpha) \mapsto \langle \alpha, u\rangle$ が $L \oplus L^*$ 上の二次形式であることに注意する．これを $L \oplus L^*$ 上の標準的二次形式とよぶ．

二次形式 $Q: V \to K$ に対し，単位元をもつ K 代数 A と K 線型写像 $i_A: V \to A$ の組で，$i_A(u)^2 = -Q(u)1$ $(u \in V)$ をみたすもののうち，『普遍的なもの』が (V, Q) のクリフォード代数である．すなわち，**クリフォード代数** $C(V, Q)$, $c: V \to C(V, q)$ とは，単位元をもつ K 代数と K 線型写像の組であって $c(u)^2 = -Q(u)1$ $(u \in V)$ をみたし，さらに単位元をもつ K 代数 A と K 線型写像 $i_A: V \to A$ の組で，$i_A(u)^2 = -Q(u)1$ $(u \in V)$ をみたす任意のものに対し，K 代数の準同型 $j_A: C(V, Q) \to A$ が一意的に存在して，$j_A c = i_A$ をみたすもののことである．

クリフォード代数は，V 上のテンソル代数 $T(V)$ を，$u \otimes u + Q(u)1$ $(u \in V)$ で生成される両側イデアルで割ったものとして構成される．

$V = \mathbb{R}^n$ とし，V 上の双線型形式 $\langle\ ,\ \rangle$ が非退化であるとする．二次形式 Q を $Q(u) = \langle u, u\rangle$ で与える．これに対し $0 \leq p \leq n$ と V の基底 e_a $(a = 1, \ldots, n)$ が存在して，$\eta_{ab} = \langle e_a, e_b\rangle$ とおくと，$\eta_{aa} = -1$ $(1 \leq a \leq p)$, $\eta_{aa} = 1$ $(a > p)$, $\eta_{ab} = 0$ $(a \neq b)$ となる．p を二次形式 q の指数という．このときクリフォード代数 $C(V, Q)$ を $C(p, n-p)$ と書く．$c(e_a)c(e_b) + c(e_b)c(e_a) = -2\eta_{ab}$ がなりたつ．パウリ行列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は $C(3, 0)$ の生成元を与える．

$p = n - p$ のとき，$\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathbb{R}^p \oplus (\mathbb{R}^p)^*$ 上の自然な対称双線型形式と見なすことにより，$C(p, p)$ と外積代数 $\bigwedge \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{2^p}$ 上の行列環との間の同型が得られる．

$C(p, q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ は，$p+q$ が等しいものどうしたがいに同型になり，さらに $p + q = 2k$ が偶数のとき，$\bigwedge \mathbb{C}^k = \mathbb{C}^{2^k}$ 上の行列環と同型になる．したがって，$C(1, 3)$ の場合，その元を $4 = 2^2$ 次複素正方行列で表現することができるのである．

${\gamma_1}^2 = \pm{\gamma_2}^2$ の場合，$\gamma'_j = \gamma_1\gamma_2\gamma_j$ $(j > 2)$ は γ_1, γ_2 と可換で，

$$\gamma'_j\gamma'_k + \gamma'_k\gamma'_j = \mp\eta_{jk}$$

をみたす．したがって，

$$\begin{aligned} C(p+1,\, q+1) &\cong C(1,\, 1)\otimes C(p,\, q), \\ C(p+2,\, q) &\cong C(2,\, 0)\otimes C(q,\, p), \\ C(p,\, q+2) &\cong C(0,\, 2)\otimes C(q,\, p) \end{aligned}$$

が得られ，これを用いて

$$C(p+4,\, q) \cong C(p,\, q+4),$$
$$C(p+8,\, q) \cong C(4,\, 4)\otimes C(p,\, q) \cong C(p,\, q+8)$$

が言える．

V を $2k$ 次元実ベクトル空間，Q を V 上の指数 p の非退化二次形式とする．これは $\mathbb{C}$ 上の二次形式 $Q_{\mathbb{C}} : V\otimes\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を誘導する．このとき，k 次元複素ベクトル空間 L と同型 $V\otimes\mathbb{C} \cong L\oplus L^*$ が存在して，$V\otimes\mathbb{C}$ 上の二次形式 $Q_{\mathbb{C}}$ が $L\oplus L^*$ 上の標準的二次形式に対応し，クリフォード代数 $C(V\otimes\mathbb{C},\, Q_{\mathbb{C}}) = C(V,\, Q)\otimes\mathbb{C}$ は $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\bigwedge L)$ に同型になる．

11.1.3　正定値の場合

V が n 次元，Q が正定値で，$Q(e_i,\, e_j) = \delta_{ij}$ とする．$c : V \to C(V,\, Q)$ に対し，$i \neq j$ ならば，

$$[c(e_i)c(e_j),\, c(e_k)] = 2\delta_{ik}e_j - 2\delta_{jk}e_i.$$

よって $\rho : \mathfrak{so}(n) \to C(V,\, Q)$ を

$$\rho(X) = -\frac{1}{4}X_{ij}\, c(e_i)c(e_j), \quad X(e_j) = X_{ij}e_i \tag{11.1}$$

で定めると，$[\rho(X),\, c(e_k)] = c(X(e_k))$．

11.1.4　スピノル群とスピン表現

$C(0,\, n)$ の可逆元 $\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\,\gamma_i\gamma_j$ $(i \neq j)$ の生成する群を $\mathrm{Spin}(n)$ と書き，n 次スピノル群という．$g = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\,\gamma_i\gamma_j$ $(i \neq j)$ に対し，

$$g\gamma_i g^{-1} = \cos(\theta)\gamma_i + \sin(\theta)\gamma_j, \quad g\gamma_j g^{-1} = -\sin(\theta)\gamma_i + \cos(\theta)\gamma_j,$$

$g\gamma_k g^{-1} = \gamma_k$ $(k \neq i,\, j)$ である．$g \in \mathrm{Spin}(n)$, $u \in V$ に対し，$gug^{-1} \in V$ であって，$\langle gug^{-1},\, gug^{-1}\rangle = -(gug^{-1})(gug^{-1}) = \langle u,\, u\rangle$．これにより，全射準同型 $\mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ が得られる．その核は $\{\pm 1\}$ である．

$n = 2k$ のとき，

$$\Delta_{2k}^{+} = \bigwedge^{\text{even}} L = \bigoplus_{j \geq 0} \bigwedge^{2j} L, \quad \Delta_{2k}^{-} = \bigwedge^{\text{odd}} L = \bigoplus_{j \geq 0} \bigwedge^{2j+1} L$$

とおくと，これらは $\mathrm{Spin}(2k)$ の複素表現になる．Δ_{2k}^{+} を正スピン表現，Δ_{2k}^{-} を負スピン表現という．$V \subset C(V, Q)$ より，クリフォード積 $c : V \otimes \Delta_{2k}^{\pm} \to \Delta_{2k}^{\mp}$ が定義される．

11.2 ディラック作用素の指数定理

11.2.1 ディラック作用素

n 次元有向リーマン多様体 M の接ベクトル束の $\mathrm{SO}(n)$ 枠束 $P_{\mathrm{SO}}(TM)$ に対し，M 上の $\mathrm{Spin}(n)$ 主束 P_{Spin}，および $\mathrm{SO}(n)$ 主束 $P_{\mathrm{Spin}}/\{\pm 1\}$ から $P_{\mathrm{SO}}(TM)$ への同型の組を，M の **スピン構造** という．スピン構造を指定した多様体をスピン多様体という．n が偶数のとき，P_{Spin} と正／負スピン表現 $\Delta_n^{\pm}$ に付随する複素ベクトル束 $\Delta_M^{\pm}$ を，M の正／負スピン束という．

各点 $p \in M$ において，クリフォード積 $c_p : T_pM \otimes (\Delta_n^{\pm})_p \to (\Delta_n^{\mp})_p$ が定義される．リーマン計量は，TM と T^*M の間の同一視を与える．

$n = 2k$ 次元スピン多様体 M に対し，レビチビタ接続 ∇ により，$\Delta_M^{\pm}$ 上の接続 $\nabla^{\pm}$ が誘導される．このとき

$$\Gamma(\Delta_M^{\pm}) \underset{\nabla^{\pm}}{\to} \Omega^1(\Delta_M^{\pm}) \underset{c}{\to} \Gamma(\Delta_M^{\mp})$$

の合成として定義される 1 階微分作用素 $D^{\pm}$ を **ディラック作用素** という．

$$D = D^{+} + D^{-} : \Gamma(\Delta_M^{+} \oplus \Delta_M^{-}) \to \Gamma(\Delta_M^{+} \oplus \Delta_M^{-})$$

とおく．

さらに，M 上の階数 n のエルミート・ベクトル束 E とその上の $\mathrm{U}(n)$ 接続 A に対し，$\nabla^{\pm}$ と合わせて，$\Delta_M^{\pm} \otimes E$ 上の接続 $\nabla^{\pm, A}$ が誘導される．このとき

$$\Gamma(\Delta_M^{\pm} \otimes E) \underset{\nabla^{\pm, A}}{\to} \Omega^1(\Delta_M^{\pm} \otimes E) \underset{c}{\to} \Gamma(\Delta_M^{\mp} \otimes E)$$

の合成として定義される 1 階微分作用素 $D_A^{\pm}$ を E に値をとる **ディラック作用素** という．$D_A^{\pm}$ はたがいに随伴である．

$D_A^{\pm}$ は楕円型である．よって M がコンパクトのとき，その核と余核は有限次元になる．核の次元から余核の次元を引いたものが指数 $\mathrm{ind}(D_A^{\pm})$ である．

$D^{-}D^{+}, D^{+}D^{-}$ の固有値は非負であり，D^{+}, D^{-} は正の固有値の固有空間の間の同型を与える．したがって次が成立する．

定理 11.2.1（マキーン＝シンガーの定理）

$$\mathrm{ind}(D_A^{+}) = \mathrm{tr}\left[\mathrm{e}^{-tD_A^{-}D_A^{+}}\right] - \mathrm{tr}\left[\mathrm{e}^{-tD_A^{+}D_A^{-}}\right].$$

M のスカラー曲率を κ とすると，次がなりたつ．

定理 11.2.2（リヒネロビッツの公式）$D^2 = -\nabla^*\nabla + \dfrac{\kappa}{4}$.

証明 $\mathfrak{so}(n)$ の $\Delta^+ \oplus \Delta^-$ 上の表現を ρ で表す．

TM の局所直交枠 (e_i) に対し，$\nabla^*\nabla = \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} - \nabla_\xi$, $\xi = \nabla_{e_i}e_i$.

点 $p \in M$ で $(\nabla_{e_i}e_j)_p = 0$ となるように (e_i) を取ると，p において，

$$\begin{aligned} D^2 &= c(e_i)\nabla_{e_i} \circ c(e_j)\nabla_{e_j} = c(e_i)c(e_j)\nabla_{e_i}\nabla_{e_j} \\ &= -\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} + \frac{1}{2}c(e_i)c(e_j)[\nabla_{e_i},\, \nabla_{e_j}] \\ &= -\nabla^*\nabla + \frac{1}{2}c(e_i)c(e_j)\rho(R(e_i,\, e_j)). \end{aligned}$$

最後の式は直交枠の取り方によらないので，任意の直交枠に対して D^2 に等しい．$R_{ijkl} = g(R(e_k,\, e_l)e_j,\, e_i)$ とおくと，(11.1), (4.7), (4.6) より，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\, c(e_k)c(e_l)\rho(R(e_k,\, e_l)) = -\frac{1}{8}\, R_{ijkl}\, c(e_i)c(e_j)c(e_k)c(e_l) \\ &= -\frac{1}{8}\, (R_{ijil}\, c(e_j)c(e_l) - R_{ijki}\, c(e_j)c(e_k)) \\ &= -\frac{1}{8}\, (-R_{ijij} + R_{ijji}) = \frac{1}{4}\, \kappa. \end{aligned}$$

□

この公式より次が従う．

定理 11.2.3 コンパクト・スピン多様体 M のスカラー曲率が非負かつ 1 点で正ならば，$\mathrm{Ker}(D^\pm) = 0$.

11.2.2 指数定理

反対称行列の行列式は成分の多項式として平方式になることに注意する．有向リーマン多様体 M のリーマン曲率 R に対し，

$$\widehat{A}(R) = \det{}^{1/2}\left[\frac{R/2}{\sinh(R/2)}\right]$$

を M の $\widehat{A}$ 種数形式とよぶ．平方根の符号は多様体の向きによって決まる．また，M 上の複素ベクトル束 E と接続 A に対し，

$$\mathrm{ch}(E,\, A) = \mathrm{tr}\exp\left[\frac{i}{2\pi}\, F_A\right]$$

を **チャーン指標形式** という．

定理 11.2.4（アティヤ＝シンガー指数定理）$2k$ 次元コンパクト・スピン多様体 M とその上の複素ベクトル束 E と接続 A に対し，

$$\mathrm{ind}(D^+) = (2\pi i)^{-k}\int_M \mathrm{ch}(E,\, A)\, \widehat{A}(R).$$

証明の方針のみ述べる．マキーン＝シンガーの定理を用いるわけだが，さらに主束上の熱核の漸近展開を与える定理 8.4.3 を適用して $(D^+ + D^-)^2$ の熱核の漸近展開をがんばって計算した末，定理の積分表示を導き出す．

これとは別に，熱核の漸近展開の計算をメーラーの公式 2.7 を用いておこなう方法もある．

11.2.3 族の指数と K 群

ここではベクトル束と言ったら複素ベクトル束のことであるとする．コンパクト・ハウスドルフ空間 X 上のベクトル束は，自明束の直和因子になる．ベクトル束 E, E' が **安定同値** であるとは，自明なベクトル束 ε が存在して，$E \oplus \varepsilon \cong E' \oplus \varepsilon$ であることであった．X 上のベクトル束 E_0, E_1 の差 $E_0 - E_1$ を，$E_0 - E_1 = E_0' - E_1'$ であることが，$E_0 \oplus E_1'$ と $E_1 \oplus E_0'$ が安定同値であることと定義する．このとき，$E_0 - E_1$ の全体は，

$$(E_0 - E_1) + (E_0' - E_1') = (E_0 \oplus E_0') - (E_1 \oplus E_1')$$

を加法としてアーベル群になる．これを X の **K 群** といい，$K(X)$ と書く．ベクトル束のテンソル積 $\otimes$ により，$K(X)$ は可換環になる．連続写像 $f : X \to Y$ は，ベクトル束のひきもどしにより，準同型 $f^* : K(Y) \to K(X)$ を誘導する．また，ベクトル束の外部テンソル積 $\boxtimes$ により，準同型 $K(X) \otimes K(Y) \to K(X \times Y)$ が誘導される．

コンパクト・リー群 G に対する G 同変ベクトル束の概念を用いて，G が作用するコンパクト・ハウスドルフ空間 X に対し，同変 K 群 $K_G(X)$ を定義することもできる．これは $K(X_G)$ より詳しい情報を保持している．

ファイバー束 $\pi : M \to B$ に対し，π が固有写像（コンパクト集合の逆像がコンパクト），各 $b \in B$ 上のファイバー M_b が偶数次元スピン多様体であるとする．M 上の複素ベクトル束 E に対し，M_b 上の $E|M_b$ に値をとる楕円型作用素の指数は $K(B)$ の元を定める．これを **楕円型作用素の族の指数** という．

ベクトル束に値をとるディラック作用素は，接続に依存するのだから，接続の空間，たとえばインスタントンのモジュライ空間 $\mathcal{M}$ 上のディラック作用素の族になり，その指数は $K(\mathcal{M})$ の元を定める．

定理 11.2.5（ボット周期性）(1) 環 $K(S^2)$ は $\mathbb{Z}[\eta]/((1-\eta)^2)$ と同型である．
(2) 外部テンソル積の誘導する準同型 $K(X) \otimes K(S^2) \to K(X \times S^2)$ は同型である．

証明のアイデアを述べる．

2 次元球面上の複素ベクトル束は第 1 チャーン類によって分類される．

2 次元球面 $S^2 = \mathrm{P}^1(\mathbb{C})$ 上の超平面束 H の同値類を $\eta \in K(S^2)$ とすると，$H \oplus H^*$ が自明なベクトル束になることから，$\eta + \eta^{-1} = 2$ となる．よって

$(1-\eta)(1-\eta^{-1})=0$ となり，$(1-\eta)^2=0$ が言える．

逆に $(1-\eta)^2=0$ とすると，$\eta(2-\eta)=\eta+\eta(1-\eta)=\eta+(1-\eta)=1$ より η は可逆になる．

$K(X)\otimes K(S^2)\to K(X\times S^2)$ の逆写像

$$(p_1,\,p_2): K(X\times S^2)\to K(X)\otimes K(S^2)=K(X)\oplus K(X)\cdot(1-\eta^{-1})$$

がどう書けるかだが，$K(X)\oplus K(X)\cdot(1-\eta^{-1})$ から第 1 直和因子への射影は $\eta=1$ とおくことだから，$p_1: K(X\times S^2)\to K(X)$ は $X\times *$ への制限で定義すればよい．

そして, $p_2: K(X\times S^2)\to K(X)\cdot(1-\eta^{-1})$ は, ファイバー束 $X\times S^2\to X$ における楕円型作用素の族の指数を用いて定義することができる．すなわち 8.1.2 節のコーシー＝リーマン作用素 $\partial_S^{(n)}$ を用いる．$\mathrm{ind}(\partial_S^{(0)})=1$, $\mathrm{ind}(\partial_S^{(-1)})=0$ に注意.

$X\times S^2$ 上の階数 r のベクトル束 E に対し，$S^2=\mathrm{P}^1(\mathbb{C})$ の開被覆 U_0, U_∞ と局所座標 $z: U_0\to\mathbb{C}$, $w: U_\infty\to\mathbb{C}$, $zw=1$ を取り，$X\times U_0$, $X\times U_\infty$ に関する貼りあわせ関数を，$x\in X$ の連続関数を係数とする w の有理式成分の r 次正方行列 $P_x(w)$ で表す．そして 8.1.2 節と同様に，

$$S^0(E)_x=\{f(z)\in S\otimes\mathbb{C}^r \mid P_x(w)f(w^{-1}): C^\infty \text{ at } w=0\},$$
$$S^1(E)_x=\{g(z)\in S\otimes\mathbb{C}^r \mid P_x(w)g(w^{-1})\,\mathrm{d}(\bar{w}^{-1}): C^\infty \text{ at } w=0\}$$

の間のコーシー＝リーマン作用素の族を $\bar{\partial}_{S,\,E}=\{(\bar{\partial}_{S,\,E})_x\}_{x\in X}$ とするとき，

$$p_2([E])=\mathrm{ind}(\bar{\partial}_{S,\,E})\cdot(1-\eta^{-1})$$

と定義する．

参考文献

[1] ボット＝トゥー，微分形式と代数トポロジー，シュプリンガー・フェアラーク東京，1996.
[2] ミルナー，モース理論，吉岡書店，1968.
[3] M. F. Atiyah, K-Theory, Addison-Wesley, 1967.
[4] 服部晶夫，多様体，岩波書店，1989.
[5] 服部晶夫，多様体のトポロジー，岩波書店，2003.
[6] 松本幸夫，多様体の基礎，東京大学出版会，1988.
[7] 森田茂之，微分形式の幾何学，岩波書店，2005.
[8] 枡田幹也，代数的トポロジー，朝倉書店，2002.
[9] 深谷賢治，ゲージ理論とトポロジー，シュプリンガー・フェアラーク東京／丸善，1995, 2012.
[10] 古田幹雄，指数定理，岩波書店，2008.
[11] N. Berline, E. Getzler and M. Vergne, Heat Kernels and Dirac Operators, Springer, 2004.
[12] S. K. Donaldson and P. Kronheimer, The Geometry of Four-Manifolds, Oxford, 1990.
[13] D. Freed and K. Uhlenbeck, Instantons and Four-Manifolds, Springer, 1984, 1991.
[14] ブレジス，関数解析—その理論と応用に向けて，産業図書，1988.
[15] 田辺広城，関数解析下，実教出版，1981.
[16] A. Friedman, Partial Differential Equations, Dover, 2008.
[17] N. V. Krylov, Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces, AMS, 2008.

索　引

欧字

1 の分割　51

AHS 複体　91
ASD 接続　90, 167
ASD 方程式　90

C^∞ 多様体　39

L^∞　111
L^p　110

theorema egregium　59

ア

アイレンベルグ＝ジルバー (Eilenberg-Zilber) の定理　180
亜群　50
アサイクリック　179
アスコリ＝アルツェラ (Ascoli-Arzelà) の定理　96, 121
アティヤ＝シンガー (Atiyah-SInger) 指数定理　197
アフィン構造　62
アフィン接続　62, 64
アプリオリ評価　152, 154, 158
安定多様体　165
安定同値　192, 198

異種 $\mathbb{R}^4$　39
位相多様体　38
一様有界性定理　112
インスタントン　90, 165

ウィッテン (Witten) 複体　170

エントロピー　27

横断的　45

カ

開写像定理　105
外積代数　43
開被覆　38
外微分作用素　9, 48
外部テンソル積　42
カシミール (Casimir) 作用素　162
可積分　60
形作用素　57
カノニカル分布　28
絡み数　11
カルテシアン射　41
管状近傍　46

擬内積　15
球面束　188
ギュシン (Gysin) 完全列　188, 189
ギュシン (Gysin) 準同型　189
境界作用素　49
境界つき多様体　163
共変外微分　78
共変微分　63
局所系　186
局所有限　51
曲率　62, 64
擬リーマン (Riemann) 計量　16, 65
擬リーマン (Riemann) 多様体　65
キリング (Killing) 形式　87

グラスマン (Grassmann) 多様体　44
クリストフェル (Christoffel) 記号　62
グリーン (Green) 関数　94
グリーン (Green) 作用素　161
クロス積　183

ゲージ変換　6, 82

構造方程式　76
勾配ベクトル場　164

コサイクル 49
コチェイン 49
コバウンダリー 49
コホモロジー群 49
コボルディスム 192
コンパクト作用素 97

サ

サイクル 50
細分 51

指数写像 65
射影空間 43
重心細分 184
主束 79
主表象 148, 158
真空 167
シンプレクティック変換 4

随伴表現 71
スカラー曲率 69
スター作用素 15, 16, 88
スツルム=リウヴィユ (Sturm-Liouville) 型境界値問題 93
スティーフル=ホイットニー (Stiefel-Whitney) 類 191
ストークス (Stokes) の定理 8, 178
スペクトル系列 175

正則値 164
接続 82
切断 41
接ベクトル 44
接ベクトル空間 45
接ベクトル束 46
漸近展開 29
全有界 120

測地線 65
測地的法座標系 65
ソボレフ (Sobolev) 埋めこみ 141
ソボレフ (Sobolev) 空間 134
ソボレフ (Sobolev) 半ノルム 126

タ

台 42
第 1 基本形式 58
対称アフィン接続 62, 64
対称テンソル場 16
体積形式 16
体積要素 69
第 2 基本形式 58
楕円型 149, 158

チェイン 50
チャーン (Chern) 形式 85, 87
チャーン=サイモンズ (Chern-Simons) 形式 87, 166
チャーン (Chern) 指標 197
チャーン (Chern) 類 85, 87, 191
超曲面 39
超対称性 169
直線束 41

テンソル代数 43

等価原理 68
同変オイラー類 191
同変ベクトル束 73
特異コホモロジー群 177
特異単体 177
特異ホモロジー群 177
特性類 87, 191
トム (Thom) 形式 14
ドラーム (de Rham)・コホモロジー 51
ドラーム (de Rham) の定理 178
ドラーム (de Rham) 複体 51

ナ

内部積 48

ねじれ 62–64
熱核 162

ハ

バウンダリー 50
バナッハ (Banach) 空間 105
ハミルトニアン (Hamiltonian) 4, 24

パラコンパクト　51
半単純リー (Lie) 環　87
ハンドル　164
ハーン＝バナッハ (Hahn-Banach) の定理　103

ビアンキ (Bianchi) 恒等式　64, 78, 83
ひきもどし　42, 49
微分形式　9, 47
微分同相　39
ヒルベルト (Hilbert) 空間　105
ヒルベルト＝シュミット (Hilbert-Schmidt) の展開定理　101

ファイバー束　40
不安定多様体　165
フィルトレーション　30
フィルトレーションつき複体　173
フェルミ (Fermi) 座標系　68
フォック (Fock) 空間　167
複素多様体　40
複体　49
フレア (Floer)・ホモロジー　167
フレドホルム (Fredholm) 作用素　106
フロベニウス (Frobenius) の定理　61
分配関数　28
分類空間　190

閉グラフ定理　106
平行移動　77
平坦アフィン接続　62, 64
平坦接続　77
ベクトル束　41
ベクトル場　46
ヘッシアン (Hessian)　164
ベッセル (Bessel) の不等式　100
ヘルダー (Hölder) 半ノルム　120
ベール (Baire) のカテゴリー定理　105
変換関数　41

ボーア＝ゾンマーフェルト (Bohr-Sommerfeld) の量子化規則　34, 171
ポアンカレ (Poincaré) の補題　51, 53
ポインティング (Poyinting)・ベクトル場　13
法ベクトル空間　46
法ベクトル束　46
ボット (Bott) 周期性　198
ホモトピー　49, 179
ホモロジー群　50
ボルスク＝ウラム (Borsuk-Ulam) の定理　38, 190
ポントリャーギン (Pontryagin) 類　191

マ

マイヤー＝ヴィートリス (Mayer-Vietoris) 完全列　185
マウラー＝カルタン (Maurer-Cartan) 形式　76
マキーン＝シンガー (McKean-Singer) の定理　196
マクスウェル (Maxwell) 方程式　10, 12

ミンコフスキー (Minkowski) 空間　17

芽　42
メーラー (Mehler) の公式　35

モジュライ空間　91, 165
モース (Morse) 関数　164
モース (Morse) 指数　164
モース＝スメール (Morse-Smale) 関数　165

ヤ

ヤコビ (Jacobi) 場　65
ヤン＝ミルズ (Yang-Mills) 接続　89
ヤン＝ミルズ (Yang-Mills) 汎関数　89

有界作用素　98
ユークリッド (Euclid) 空間　56
ユークリッド (Euclid) 計量　56

葉層　60
余接ベクトル束　47

ラ

ラグランジアン (Lagrangian)　3, 14
ラグランジュ (Lagrange) 部分空間　94
ラプラシアン　159

リー (Lie) 環　71
リー (Lie) 群　72
リース (Riesz) の表現定理　117
リッチ (Ricci) 曲率　69

リヒネロビッツ (Lichnerowicz) の公式　197
リー (Lie) 微分　48
リーマン (Riemann) 曲率　59, 66
リーマン (RIemann) 計量　16, 65
リーマン (Riemann) 多様体　65
臨界点　164
レビチビタ (Levi-Civita) 接続　58, 66
レリッヒ＝コンドラショフ (Rellich-Kondrashov) の定理　146
ローレンツ (Lorentz) 計量　16, 65
ローレンツ (Lorentz) 多様体　65

著 者 略 歴

橋本　義武
はしもと　よしたけ

1990 年　東京大学大学院理学系研究科博士課程修了
　　　　理学博士
1994 年　大阪市立大学理学部助手
1998 年　同講師
2000 年　同助教授
2009 年　東京都市大学知識工学部教授（現在に至る）

専　門　トポロジー　微分幾何　ADHM 構成・リーマン面上の微分の
モジュライ・高次元ブラックホールの研究

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ - 114
『ゲージ理論の基礎数理　物理学的背景からトポロジー，微分幾何，関数解析まで』

著　者　橋本 義武

2015 年 2 月 10 日　初版発行

数 理 科 学 編 集 部　　　発行人 木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp まで.　　　表紙デザイン：長谷部貴志

発行所 ©　株式会社 **サイエンス社**　　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-88：for Senior & Graduate Courses）

演習形式で学ぶ
リー群・リー環

示野　信一　著

定価 2571 円

大学理工系において，学部の課程で習うことは少ないが，大学院では常識として必要となってくる斯学を，例題，演習問題を通して自習できる得難い一冊．行列の作る群やリー環の実例を豊富に盛り込みながら，リー理論，カルタン・ワイル理論といった斯学の基礎を位相や多様体などの概念も用いて数学的にきちんと解説．

第 1 章　リー理論の概観

第 2 章　回転群とその一般化

第 3 章　行列の指数関数

第 4 章　閉線形群のリー環

第 5 章　3 次元空間の回転

第 6 章　線形群の位相

第 7 章　閉線形群の間の準同型写像

第 8 章　$SU(2)$ と $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の表現

第 9 章　$SU(3)$ と $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の表現

第 10 章　極大トーラス

付録 A　演習問題の方針，ヒント

サイエンス社